

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) A matrisinin köşegen baskın olduğunu gösteriniz.

(b) A matrisinin özdeğerlerini içeren diskleri çiziniz. Bu özdeğerler yardımıyla A 'nın tüm özdeğerlerini içeren bir aralık bulunuz.

(c) $\rho(A)$ spectral yarıçapı için alt ve üst sınır bulunuz. (örneğin üst sınır için $\rho(A) \leq \|A\|$)

(d) A matrisinin belirttiği lineer bir $Ax = b$, $b = [0, 1, 0, 2]^T$ sistemi için Jacobi ve Gauss-Seidel iterasyon sistemlerini üretiniz. Bu yöntemler ile üretilen iterasyon dizileri çözüme yakınsar mı, neden?

(e) A matrisinin koşul sayısını(condition number) bulunuz.

2. $xe^x - 1 = 0$ doğrusal olmayan denklemini için önce aşağıdaki sabit nokta fonksiyonlarını üretiniz.

- $g_1(x) = e^{-x}$
- $g_2(x) = x - xe^x + 1$
- $g_3(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$

Bu sabit nokta fonksiyonlarından hangisi veya hangileriyle üretilen sabit nokta yinelemesinin , denklemin $[0, 1]$ aralığındaki çözümüne yakınsayacağını gösteriniz.

Not: her bir $x_{n+1} = g_i(x_n)$, $i = 1, 2, 3$ sabit nokta yinelemesi için sonuçlar ve hatalar aşağıdaki gibidir.

k	$x_{(k+1)} := g_1(x_{(k)})$	$x_{(k+1)} := g_2(x_{(k)})$	$x_{(k+1)} := g_3(x_{(k)})$
0	0.5000000000000000	0.5000000000000000	0.5000000000000000
1	0.606530659712633	0.566311003197218	0.675639364649936
2	0.545239211892605	0.567143165034862	0.347812678511202
3	0.579703094878068	0.567143290409781	0.855321409174107
4	0.560064627938902	0.567143290409784	-0.156505955383169
5	0.571172148977215	0.567143290409784	0.977326422747719
6	0.564862946980323	0.567143290409784	-0.619764251895580
7	0.568438047570066	0.567143290409784	0.713713087416146
8	0.566409452746921	0.567143290409784	0.256626649129847
9	0.567559634262242	0.567143290409784	0.924920676910549
10	0.566907212935471	0.567143290409784	-0.407422405542253

k	$ x_{(k+1)} - x^* _1$	$ x_{(k+1)} - x^* _2$	$ x_{(k+1)} - x^* _3$
0	0.067143290409784	0.067143290409784	0.067143290409784
1	0.039387369302849	0.000832287212566	0.108496074240152
2	0.021904078517179	0.000000125374922	0.219330611898582
3	0.012559804468284	0.000000000000003	0.288178118764323
4	0.007078662470882	0.000000000000000	0.723649245792953
5	0.004028858567431	0.000000000000000	0.410183132337935
6	0.002280343429460	0.000000000000000	1.186907542305364
7	0.001294757160282	0.000000000000000	0.146569797006362
8	0.000733837662863	0.000000000000000	0.310516641279937
9	0.000416343852458	0.000000000000000	0.357777386500765
10	0.000236077474313	0.000000000000000	0.974565695952037

3. $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu veriliyor. Doğrusal olmayan bu fonksiyonun bu aralıkta sıfır yerini veren Regula-Falsi iterasyon dizisini üretiniz.

	x	$f(x)$	1.Böl. Farklar	2. Böl. Farklar	3. Böl. Farklar
4.	-1	1			
	0	0			
	1	1			
	2	2			

tabloyu doldurunuz. Buradan $f(x)$ için oluşturulabilecek polinom interpolasyonunu bulunuz.

5.	x	1	$\frac{1}{2}$	3
	y	3	-10	2

- (a) Verilen değerler için Lagrange interpolasyon polinomunu bulunuz.
(b) Verilen değerler için Newton interpolasyon polinomunu bulunuz.
(c) Verilen değerler için Bölünmüş farkları kullanarak ileri fark interpolasyonunu bulunuz..

6.
$$\begin{cases} x^3 + y = 1 \\ y^3 - x = -1 \end{cases}$$
 doğrusal olmayan denklem sistemi veriliyor.

(a) Bu sistemi çözecek Newton iterasyon dizisini üretiniz.

(b)
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$
 başlangıç iterasyonu ile $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(n)} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ gerçekte çözüme yakınsayınız.

7.
$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^4 = 0 \\ x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$
 doğrusal olmayan denklem sistemi veriliyor. Bu sistemi çözecek Newton iterasyon dizisini üretiniz.

Not: $\mathbf{x}^{(0)} = [0.7, 0.7]^T$ başlangıç noktası için iterasyon adımları aşağıdaki gibidir.

k	$[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}]^T$	$\ x^{(k)} - x^*\ _2$
0	$(0.7, 0.7)^T$	4.24e-01
1	$(0.878500000000000, 1.064285714285714)^T$	1.37e-01
2	$(1.01815943274188, 1.00914882463936)^T$	2.03e-02
3	$(1.00023355916300, 1.00015913936075)^T$	2.83e-04
4	$(1.00000000583852, 1.00000002726552)^T$	2.79e-08
5	$(0.9999999999999998, 1.000000000000000)^T$	2.11e-15
6	$(1, 1)^T$	

8.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$
 matrisi veriliyor.

(a) Kuvvet yöntemiyle A matrisinin en büyük özdeğerine yakınsayınız. $\mathbf{x}^0 = [1, 1]^T$, $\epsilon = 10^{-3}$ alınız ve 4-digít yuvarlama çalışınız.

(b) A matrisinin tersini bulunuz. $Ax = \lambda x$ ise $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$ olduğunu gösterip A^{-1} matrisine kuvvet yöntemini uygulayarak A^{-1} 'nin en büyük özdeğerine yani A 'nın en küçük özdeğerine yakınsayınız.

(c) Yukarıdaki sonuçlarınızın sağlanmasını A ve A^{-1} 'nin özdeğerlerini ve spectral yarıçaplarını bularak yapınız.

9. $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonunun $[1, 2]$ aralığındaki kökünü $\epsilon = 10^{-2}$ doğrulukla aralık yarılama(bisection) yöntemiyle bulunuz. İterasyon sayısı tahmini ne olur?

a	b	$f(a)$	$f(b)$	$c = (a + b)/2$	$f(c)$	güncelle	yeni $b - a$
1.0	2.0	-2.0	1.0	1.5	-0.75	$a = c$	0.5
1.5	2.0	-0.75	1.0	1.75	0.062	$b = c$	0.25
1.5	1.75	-0.75	0.0625	1.625	-0.359	$a = c$	0.125
1.625	1.75	-0.3594	0.0625	1.6875	-0.1523	$a = c$	0.0625
1.6875	1.75	-0.1523	0.0625	1.7188	-0.0457	$a = c$	0.0313
1.7188	1.75	-0.0457	0.0625	1.7344	0.0081	$b = c$	0.0156
1.7188	1.7344	-0.0457	0.0081	1.7266	-0.0189	$a = c$	0.0078

10. $f(x) = e^{-x}(3.2 \sin x - 0.5 \cos x)$ fonksiyonunun $[3, 4]$ aralığında kökü olduğunu gösteriniz ve bu aralıktaki köküne $\epsilon = 10^{-3}$ doğrulukla aralık yarılama (bisection) yöntemiyle yaklaşım bulunuz. İterasyon sayısı tahmini ne olur?

a	b	$f(a)$	$f(b)$	$c = (a + b)/2$	$f(c)$	$f(a)f(c) < 0$ veya $f(c)f(b) < 0$	$f(a)f(c) < 0$ kök $[a, c]$ arasında	güncelle	yeni $b - a$
3.0	4.0	0.047127	-0.038372	3.5	-0.019757			$b = c$	0.5
3.0	3.5	0.047127	-0.019757	3.25	0.0058479			$a = c$	0.25
3.25	3.5	0.0058479	-0.019757	3.375	-0.0086808			$b = c$	0.125
3.25	3.375	0.0058479	-0.0086808	3.3125	-0.0018773			$b = c$	0.0625
3.25	3.3125	0.0058479	-0.0018773	3.2812	0.0018739			$a = c$	0.0313
3.2812	3.3125	0.0018739	-0.0018773	3.2968	-0.000024791			$b = c$	0.0156
3.2812	3.2968	0.0018739	-0.000024791	3.289	0.00091736			$a = c$	0.0078
3.289	3.2968	0.00091736	-0.000024791	3.2929	0.00044352			$a = c$	0.0039
3.2929	3.2968	0.00044352	-0.000024791	3.2948	0.00021466			$a = c$	0.002
3.2948	3.2968	0.00021466	-0.000024791	3.2958	0.000094077			$a = c$	0.001
3.2958	3.2968	0.000094077	-0.000024791	3.2963	0.000034799			$a = c$	0.0005

11.

$t(\text{saniye})$	0.5	1.1	1.5	2.1	2.3
$T(^{\circ}\text{C})$	32.0	33.0	34.2	35.1	35.7

 verilerini

(a) $T = at + b$ doğrusuna en küçük kareler ile uydurunuz.

(b) Her t_i zamanı için T_i doğrularını yazınız ve $\mathbf{A}_{5 \times 1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{5 \times 1}$ over-determined (5 denklem ve 2 bilinmeyenli) sistemini elde ediniz. Daha sonra her iki tarafı \mathbf{A}^T ile çarpıp normalleştirdikten sonra a ve b 'yi çözünüz.

12. (a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ verilen over-determined (artık belirtilmiş) sistemin çözümünün olmadığını gösteriniz.

(b) Normalleştirilmiş denklemleri ($\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$) kullanarak sistemin bir en küçük kareler çözümünü bulunuz.

13.

x	1	2	4	5	8	4.1
y	3	4	6	11	20	46

verilerini $y = ae^{bx}$ eğrisine uydurunuz.

14. (a) $\begin{cases} p(-2) = f(-2) = 2 \\ p'(-2) = f'(-2) = -1 \end{cases}$ ve $\begin{cases} p(2) = f(2) = 2 \\ p'(2) = f'(2) = 1 \end{cases}$ koşullarını sağlayan $p(x)$

Hermite İnterpolasyon Polinomunu üretiniz.

(b) Yukarıdaki koşullara ek olarak $p(0) = f(0) = 0$ verilseydi, $f(x) = |x|$ fonksiyonunu interpolate edecek Hermite polinomu ne olurdu?

Not: $f(x) \approx H(x) = \sum_{i=0}^N [f(x_i)A_i(x) + f'(x_i)B_i(x)]$. Burada $A_i(x) = [1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)]L_i^2(x)$, $B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x)$ ve $L_i(x)$ 'ler Lagrange polinomlarıdır.