

# 1 . BÖLÜM

## 1.1 ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdakilerden hangileri  $x_1, x_2$  ve  $x_3$  ün lineer denklemdir?

a)  $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$

b)  $x_1 - 3x_2 + x_1x_3 = 2$

c)  $x_1 = -7x_2 + 3x_3$

d)  $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$

e)  $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2. Verilen bir  $k$  sabiti için, aşağıdakilerden hangileri lineer denklemdir?

a)  $x_1 - x_2 + x_3 = \sin k$

b)  $kx_1 - \frac{1}{k}x_2 = 9$

c)  $2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

3. Aşağıda verilen lineer denklemlerin herbirinin çözüm kümesini bulunuz.

a)  $7x - 5y = 3$

b)  $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

c)  $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

d)  $3u - 8w + 2x - y + 4z = 0$

4. Aşağıda verilen lineer denklem sistemlerinin eklenmiş matrislerini bulunuz.

$3x_1 - 2x_2 = -1$

a)  $4x_1 + 5x_2 = 3$

$7x_1 + 3x_2 = 2$

$2x_1 + 2x_3 = 1$

b)  $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$

$6x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$

c)  $3x_2 + x_3 - x_5 = 2$

$x_3 + 7x_4 = 1$

d)  $x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 3$

5. Aşağıdaki eklenmiş matrislere karşılık gelen lineer denklem sistemlerini bulunuz.

a) 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) 
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

c) 
$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

6. Genel çözümleri aşağıda verilen lineer denklemi bulunuz.

a)  $x = 5 + 2t$ ,  $y = t$

- b)  $x = t$ ,  $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$  nin (a) da bulunan denklemin bir genel çözümü olduğunu gösteriniz.

7. Aşağıda grafikte  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  ve  $(x_3, y_3)$  noktalarından geçen  $y = ax^2 + bx + c$  eğrisi verilsin.  $a, b, c$  katsayılarının ,

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

eklenmiş matrisinin çözümleri olduğunu gösteriniz.

8.  $k$  nın hangi değerleri için

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümü yoktur? Bir tek çözümü vardır? Sonsuz çoklukta çözümü vardır?

9. Aşağıdaki

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x + z &= b \\ 2x + y + 3z &= c \end{aligned}$$

denklem sistemini ele alalım. Sistemin anlamlı olması için  $a, b$  ve  $c$  nin  $c = a + b$  koşulunu sağlaması gerektiğini gösteriniz.

## 1.2 ALIŖTIRMALAR

1. AŖağıdakilerden hangisi satırca indirgenmiŖ eŖolon biçimindedir?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{f)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{g)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{h)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{i)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. AŖağıdakilerden hangileri satır-eŖolon biçimindedir?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{f)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. AŖağıdakilerin hangisi satır-eŖolon, hangisi satırca indirgenmiŖ eŖolon biçimindedir?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} & \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{f)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. AŖağıdaki satır eŖolon veya satırca indirgenmiŖ eŖolon biçimine getirilmiŖ ekleymiŖ matrislere karŖılık gelen denklem sistemlerini çözümlü.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \\ \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \\ \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

5. Aşağıda verilen eklenmiş matrislere karşılık gelen denklem sistemini çözünüz.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

6. Aşağıdaki sistemleri Gauss-Jordan eleme yöntemi ile çözünüz.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{array} \\ \text{c)} \begin{array}{l} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b)} \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{array} \\ \text{d)} \begin{array}{l} -2b + 3c = 1 \\ 3a + 6b - 3c = -2 \\ 6a + 6b + 3c = 5 \end{array} \end{array}$$

7. Alıştırma 6 daki soruları Gauss-eleme yöntemi ile çözünüz.

8. Aşağıdaki sistemleri Gauss-Jordan eleme yöntemi ile çözünüz.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{array} \\ \text{c)} \begin{array}{l} 4x_1 - 8x_2 = 12 \\ 3x_1 - 6x_2 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 = -6 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b)} \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 30 \end{array} \\ \text{d)} \begin{array}{l} 10y - 4z + w = 1 \\ x + 4y - z + w = 2 \\ 3x + 2y + z + 2w = 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w = -4 \\ x - 6y + 3z = 1 \end{array} \end{array}$$

9. Alıştırma 8 deki soruları Gauss eleme yöntemi ile çözünüz.

10. Aşağıdaki sistemleri Gauss-Jordan eleme yöntemi ile çözünüz.

a)  $5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$   
 $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$

b)  $x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1$   
 $x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2$   
 $x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5$

c)  $w + 2x - y = 4$   
 $x - y = 3$   
 $w + 7x - 2y = 7$   
 $2u + 4v + w + 7x = 7$

11. Alıştırma 10 daki soruları Gauss eleme yöntemi ile çözünüz.

12. Aşağıdaki sistemi çözünüz.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 9 \\ x_1 - 2x_3 + 7x_4 &= 11 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 10 \end{aligned}$$

13.  $a, b, c$  sabitler olmak üzere aşağıdaki sistemleri çözünüz.

a)  $2x + y = a$   
 $3x + 6y = b$

b)  $x_1 + x_2 + x_3 = a$   
 $2x_1 + 2x_3 = b$   
 $3x_2 + 3x_3 = c$

14. Aşağıdaki sistemde  $a$  nın hangi değerleri için

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

- a) Sistemin çözümü yoktur?  
b) tek çözümü vardır?  
c) sonsuz sayıda çözümü vardır?

15. Aşağıdaki matrisi satırca indirgenmiş eşelon biçimine getiriniz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

16. Aşağıda verilen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi için iki tane satır-eşelon biçimi bulunuz.

17.  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  açıları,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \beta \leq 2\pi$  ve  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$  olmak üzere aşağıdaki lineer olmayan denklem sistemini çözünüz.

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha - \cos \beta + 3 \tan \gamma &= 3 \\ 4 \sin \alpha + 2 \cos \beta - 2 \tan \gamma &= 2 \\ 6 \sin \alpha - 3 \cos \beta + \tan \gamma &= 9 \end{aligned}$$

18. Aşağıdaki lineer olmayan denklem sistemini çözünüz.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3 \end{aligned}$$

19.  $ad - bc \neq 0$  ise  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  matrisinin satırca indirgenmiş biçiminin  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  olduğunu gösteriniz.

20. A1ıştırma 19 de  $ad - bc \neq 0$  olduğunda

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

sisteminin bir tek çözümünün varlığını gösteriniz.

### 1.3 ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki homojen sistemlerinin hangilerinin aşikar olmayan çözümü vardır?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} & \text{b)} & \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned} \\ \text{c)} & \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned} & \text{d)} & \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned} \end{array}$$

2. Aşağıdaki homojen sistemleri çözünüz.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \\ w - y - 3z = 0 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \\ \text{c)} & \begin{array}{l} 2w + 3x + y + z = 0 \\ -2w + x + 3y - 2z = 0 \end{array} & & \end{array}$$

3. Aşağıdaki homojen denklem sistemlerini çözünüz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{array}{l} 2x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} v + 3w - 2x = 0 \\ 2u + v - 4w + 3x = 0 \\ 2u + 3v + 2w - x = 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x = 0 \end{array} & \text{c)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \end{array}$$

4.  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ve  $x_5$  için

$$\begin{array}{l} x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{array}$$

homojen denklem sistemini çözünüz.

5.  $\lambda$  nm hangi değerleri için

$$\begin{array}{l} (\lambda - 3)x + y = 0 \\ x + (\lambda - 3)y = 0 \end{array}$$

denklem sisteminin aşık olmayaın çözümü vardır?

6. Aşağıda verilen

$$\begin{array}{l} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{array}$$

denklem sistemini ele alalım.

a)  $x = x_0, y = y_0$  bu sistemin bir çözümü ve  $k$  bir sabit sayı ise  $x = kx_0, y = ky_0$  da bir çözümdür, gösteriniz.

b)  $x = x_0, y = y_0$  ve  $x = x_1, y = y_1$  iki çözüm ise o zaman  $x = x_0 + x_1, y = y_0 + y_1$  de bir çözümdür, gösteriniz.

7. Aşağıdaki denklem sistemlerini

$$(I) \quad \begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned} \quad (II) \quad \begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

ele alalım.

- a)  $x = x_1, y = y_1$  ve  $x = x_2, y = y_2$  (I) sisteminin iki çözümü ise o zaman  $x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2$  nin (II) nin bir çözümü olduğunu gösteriniz.  
b)  $x = x_1, y = y_1$  (I) in bir çözümü ve  $x = x_0, y = y_0$  (II) denkleminin bir çözümü ise  $x = x_1 + x_0, y = y_1 + y_0$  in (I) in bir çözümü olduğunu gösteriniz.

sisteminin bir çözümü ise  $x = x_1 + x_0, y = y_1 + y_0$  in (I) in bir çözümü olduğunu gösteriniz.

## 1.4 ALIŞTIRMALAR

1.  $A, 4 \times 5; B, 4 \times 5; C, 5 \times 2; D, 2 \times 2; E, 5 \times 4$  boyutlarında matrisler olsun. Aşağıdakilerden hangileri tanımlıdır? Tanımlı işlemlerin sonuç matrisinin boyutunu bulunuz.

- a)  $BA$       b)  $AC + D$       c)  $AE + B$       d)  $AB + B$   
e)  $E(A + B)$       f)  $E(AC)$       g)  $E^t A$       h)  $(A^t + E)D$

2. Aşağıdaki matris eşitliğini  $a, b, c, d$  için çözüntüz.

$$\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Aşağıdaki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

matrislerini ele alalım. (Mümkün ise) aşağıdakileri hesaplayınız.

- a)  $D + E$       b)  $D - E$       c)  $5A$       d)  $-7C$   
e)  $2B - C$       f)  $4E - 2D$       g)  $-3(D + 2E)$       h)  $A - A$   
i)  $tr(D)$       j)  $tr(D - 3E)$       k)  $4.tr(7B)$       l)  $tr(A)$

4. Alıştırma 3 deki matrisleri kullanarak (mümkün ise) aşağıdakileri hesaplayınız.



- a)  $2A^t + C$       b)  $D^t - E^t$       c)  $(D - E)^t$       d)  $B^t + 5C^t$   
e)  $\frac{1}{2}C^t - \frac{1}{4}A$       f)  $B - B^t$       g)  $2E^t - 3D^t$       h)  $(2E^t - 3D^t)^t$

5. Alıştırma 3 deki matrisleri kullanarak (mümkün ise) aşağıdakileri hesaplayınız.

- a)  $AB$       b)  $BA$       c)  $(3E).D$       d)  $(AB)C$   
e)  $A(BC)$       f)  $CC^t$       g)  $(DA)^t$       h)  $(C^tB)A^t$   
i)  $tr(DD^t)$       j)  $tr(4E^t - D)$       k)  $tr(C^tA^t + 2E^t)$

6. Alıştırma 3 deki matrisleri kullanarak (mümkün ise) aşağıdakileri hesaplayınız.

- a)  $(2D^t - E)A$       b)  $(4B)C + 2B$       c)  $(-AC)^t + 5D^t$   
d)  $(BA^t - 2C)^t$       e)  $B^t(CC^t - A^tA)$       f)  $D^tE^t - (ED)^t$

7.  $A$  ve  $B$  matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

olsun. Aşağıdakileri hesaplayınız.

- a)  $AB$  nin birinci satırını      b)  $AB$  nin üçüncü satırını  
c)  $AB$  nin ikinci sütununu      d)  $BA$  nın birinci sütununu  
e)  $AA$  nın üçüncü satırını      f)  $AA$  nın üçüncü sütununu

8. Aşağıdakileri gösteriniz.

- a)  $AB$  ve  $BA$  tanımlı ise  $AB$  ve  $BA$  matrisleri kare matristir.  
b)  $A, m \times n$  ve  $A(BA)$  tanımlı ise  $B$  matrisi  $n \times m$  matristir.

9. Aşağıda verilen her bir lineer denklem sistemi için  $A, X, B$  matrislerini bularak  $AX = B$  biçiminde yazınız.

- a)  $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7$   
 $9x_1 - x_2 + x_3 = -1$   
 $x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$
- b)  $4x_1 - 3x_3 + x_4 = 1$   
 $5x_1 + x_2 - 8x_4 = 3$   
 $2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 = 0$   
 $3x_2 - x_3 + 7x_4 = 2$

10. Aşağıdaki her bir matris eşitliğini lineer denklem sistemi olarak ifade ediniz.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \text{b)} \quad & \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

11. Aşağıdaki matrisleri ele alalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & d_m \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & e_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & e_n \end{bmatrix}$$

- $DA$  ve  $AE$  matrislerini hesaplayınız.
- $DA$  nın satırları ile  $AE$  nin sütunlarını inceleyiniz. Buradan bir  $A$  matrisini, bir köşegen matris ile çarpma için basit kurallar geliştiriniz.
- Yukarıda bulduğunuz kuralları

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisleri için,  $AB$  ve  $BA$  hesaplanmasında kullanınız.

12. İki köşegen matrisin çarpımının yine köşegen matris olduğunu gösteriniz ve köşegen matrislerin çarpımı için bir kural geliştiriniz.

13.  $A$  ve  $B$ ,  $AB$  tanımlı olacak şekilde matrisler olsun.

- $A$  nın bir sıfır satırı var ve  $B$  herhangi bir matris ise  $AB$  nin bir sıfır satırının var olduğunu gösteriniz.
- Sütunları sıfır olan matrisler için benzer bir sonuç araştırınız.

14.  $A$  matrisinin  $i$ . satır ve  $j$ . sütun elemanı  $a_{ij}$  olsun. Bu  $a_{ij}$  elemanı  $A^t$  nin hangi satır ve sütun elemanı olur?

15.  $A$  bir  $m \times n$  matris ve  $0$ ,  $m \times n$  matris olsun.

$k.A = 0 \implies k = 0$  veya  $A = 0$  olduğunu gösteriniz.

16.  $I$  bir  $n \times n$  matris ve  $i$ . satır,  $j$ . sütun elemanı  $\begin{cases} 1 & , & i = j \\ 0 & , & i \neq j \end{cases}$  olan matris olsun. Her bir  $A$ ,  $n \times n$  matrisi için  $IA = AI = A$  olduğunu gösteriniz.

## 1.5 ALIŖTIRMALAR

1.  $a = 4$ ,  $b = -7$ ,  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$  olsun. AŖağıdakileri gösteriniz.

a)  $A + (B + C) = (A + B) + C$

b)  $(AB)C = A(BC)$

c)  $(a + b).C = aC + bC$

d)  $a.(B - C) = aB - aC$

2. AlıŖtırma 1 deki matris ve skalerleri kullanarak aŖağıdakileri gösteriniz.

a)  $a.(BC) = (aB).C = B.(aC)$

b)  $A(B - C) = AB - AC$

c)  $(B + C)A = BA + CA$

d)  $a(bC) = (ab)C$

3. AlıŖtırma 1 deki matris ve skalerleri kullanarak aŖağıdakileri gösteriniz.

a)  $(A^t)^t = A$

b)  $(A + B)^t = A^t + B^t$

c)  $(a.C)^t = aC^t$

d)  $(AB)^t = B^t.A^t$

4. AŖağıdaki matrislerin terslerini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. AlıŖtırma 4 deki  $A, B, C$  matrisleri için

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ ve } (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

olduğunu gösteriniz.

6.  $A$  ve  $B$  aynı boyutta matrisler olmak üzere

$$(AB)^2 = A^2B^2$$

geçerli bir matris özdeşliđimidir?

7.  $A$  tersinir bir matris ve tersi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

olsun.  $A$  matrisini bulunuz.

8.  $A$  tersinir bir matris ve kabul edelim ki  $7A$  matrisinin tersi

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

olsun.  $A$  matrisini bulunuz.

9.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  olsun.  $A^3, A^{-3}$  ve  $A^2 - 2A + I$  matrislerini bulunuz.

10.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  matrisi olsun.  $A$  nın tersinir olup olmadığını belirleyiniz. Tersinir ise tersini bulunuz.

11.  $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  matrisinin tersini bulunuz.

12. a)  $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$  olacak şekilde  $2 \times 2$  lik  $A$  ve  $B$  matrislerini bulunuz.

b)  $AB = BA$  olan matrisler için  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  olduğunu gösteriniz.

13. Aşağıdaki

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisini ele alalım.  $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} \neq 0$  olsun. Bu durumda  $A$  matrisinin tersinir olduğunu gösteriniz ve tersini bulunuz.

14. Bir kare  $A$  matrisi için  $A^2 - 3A + I = 0$  olsun. O zaman,  $A^{-1} = 3I - A$  olduğunu gösteriniz.

15. Aşağıdakileri gösteriniz.

- a) Sıfır satırı bulunan matris tersinir değildir.
- b) Sıfır sütunu bulunan matris tersinir değildir.

16. Tersinir iki matrisin toplamı da tersinir midir?

17. Teorem 1.5.2 (d) kısmında  $A.0 = 0 = 0.A$  neden yazılmadı?

18. Reel sayılarda  $a^2 = 1$  denkleminin iki çözümü vardır.  $A^2 = I_3$  olan en az sekiz farklı  $3 \times 3$  lük matris bulunuz.

19.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

matrisleri için, aşağıdakileri gösteriniz.

- a)  $(A^t)^t = A$
- c)  $(AB)^t = B^t A^t$
- b)  $(A + B)^t = A^t + B^t$
- d)  $(kA)^t = kA^t$

20.  $A$  bir kare matris olsun.  $A^t = A$  ise  $A$  matrisine simetrik matris,  $A^t = -A$  ise  $A$  matrisine ters-simetrik matris denir.

$B$  bir kare matris olmak üzere

- a)  $BB^t$  ve  $B + B^t$  simetrik matris olduğunu gösteriniz.
- b)  $B - B^t$  ters-simetrik matris olduğunu gösteriniz.

21.  $A$  bir kare matris ve  $n$  bir pozitif tamsayı olsun.

$$(A^n)^t = (A^t)^n \text{ midir? Neden?}$$

22.  $(A - B)^t = A^t - B^t$  olduğunu gösteriniz.

23.  $A$  tersinir matris olsun. O zaman,  $A^t$  nin de tersinir ve  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$  olduğunu gösteriniz.

24.  $A$  tersinir ve  $k$  sıfırdan farklı bir skaler olsun. O zaman her  $n$  tamsayısı için

$$(kA)^n = k^n \cdot A^n$$

olduğunu gösteriniz.

## 1.6 ALIŖTIRMALAR

1. AŖađıdakilerden hangileri elemanter matristir?

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} & \text{b)} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} & \text{d)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{f)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{g)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \end{array}$$

2. AŖađıda verilen elemanter matrisleri birim matris yapmak için gerekli olan satır iŖlemlerini bulunuz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} & \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. AŖađıdaki matrisleri ele alalım.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Bu matrisler için aŖađıdakileri sađlayan  $E_1, E_2, E_3$  ve  $E_4$  elemanter matrisleri bulunuz.

$$\text{a)} E_1A = B \quad \text{b)} E_2B = A \quad \text{c)} E_3A = C \quad \text{d)} E_4C = A$$

4. AlıŖtırma 3 deki matrisler için  $EB = C$  olacak Ŗekilde bir  $E$  elemanter matrisi bulmak mümkün müdür? Nedenini açıklayınız.

5. AŖađıdaki matrislerden tersinir olanların terslerini bulunuz.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

6. AŖađıdaki matrislerden tersinir olanların terslerini bulunuz.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{d) } \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

7. Aşağıdaki matrislerden tersinir olanların terslerini bulunuz.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{10}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \\ \text{d) } \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

8.  $k_1, k_2, k_3, k_4$  ve  $k$  sıfırdan farklı sayılar olmak üzere aşağıdaki  $4 \times 4$  lük matrislerin terslerini bulunuz.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix} \end{array}$$

9. Aşağıdaki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisini ele alalım.

- $E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$  yapan  $E_1, E_2$  elemanter matrislerini bulunuz.
- $A^{-1}$  matrisini, iki elemanter matrisin çarpımı olarak yazınız.
- $A$  matrisini, iki elemanter matrisin çarpımı olarak yazınız.

10. Verilen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi için, aşağıdakilerin her biri için bir elemanter matris bulup,  $A$  matrisi ile çarpınız. Elde ettiğiniz sonucu, aşağıdaki elemanter satır işlemini doğrudan  $A$  matrisine uygulayarak kontrol ediniz.

a) birinci ve üçüncü satır yer değiştiriyor.

b) ikinci satır  $\frac{1}{3}$  ile çarpılıyor.

c) ikinci satır ile birinci satırın yer değiştirmesi iki kez uygulanıyor.

11.  $E, F$  ve  $G$  elemanter matrisler ve  $R$  eşelon matris olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

matrisini  $A = EFG R$  biçiminde ifade ediniz.

12.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$  bir elemanter matris ise üçüncü satırdaki en az bir elemanın sıfır olmak zorunda olduğunu gösteriniz.

$$13. A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin  $a, b, c, d, e, f, g, h$  sayılarının keyfi değerleri için tersinir olmadığını gösteriniz.

14.  $A$  bir  $m \times n$  matris olsun.  $CA$  bir indirgenmiş satır eşelon matris olacak biçimde bir tersinir  $C$  matrisinin var olduğunu gösteriniz.

15.  $A$  bir tersinir matris ve  $B, A$  ya satırca denk bir matris olsun. O zaman  $B$  matrisinin tersinir olduğunu gösteriniz.



## 1.7 ALIŖTIRMALAR

AlıŖtırma 1-8 deki soruları Örnek 1 deki metod ile çöztünüz.

$$1. \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} -x - 2y - 3z &= 0 \\ -w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\
8. \quad & 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = b_2 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = b_3
\end{aligned}$$

9. Aşağıdaki sistemi Örnek 1 deki yöntem ile çözünüz.

$$\begin{aligned}
& x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = b_2 \\
& x_1 + x_2 = b_3
\end{aligned}$$

- a)  $b_1 = -1, b_2 = 3, b_3 = 4$   
b)  $b_1 = 5, b_2 = 0, b_3 = 0$   
c)  $b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = 3$

10. Alıştırma 9 daki sistemleri Örnek 2 deki yöntem ile çözünüz.

11. Aşağıdaki sistemi Örnek 2 deki yöntem ile çözünüz.

$$\begin{aligned}
& x_1 - 5x_2 = b_1 \\
& 3x_1 + 2x_2 = b_2
\end{aligned}$$

- a)  $b_1 = 1, b_2 = 4$   
b)  $b_1 = -2, b_2 = 5$

12. Aşağıdaki sistemi Örnek 2 deki yöntem ile çözünüz.

$$\begin{aligned}
& -x_1 + 4x_2 + x_3 = b_1 \\
& x_1 + 9x_2 - 2x_3 = b_2 \\
& 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 = b_3
\end{aligned}$$

a)  $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$   
b)  $b_1 = -3, b_2 = 4, b_3 = -5$

13. Aşağıdaki sistemi Örnek 2 deki yöntem ile çözünüz.

$$\begin{aligned}
& 4x_1 - 7x_2 = b_1 \\
& x_1 + 2x_2 = b_2
\end{aligned}$$

a)  $b_1 = 0, b_2 = 1$       c)  $b_1 = -1, b_2 = 3$   
b)  $b_1 = -4, b_2 = 6$       d)  $b_1 = -5, b_2 = 1$

14. Aşağıdaki sistemi Örnek 2 deki yöntem ile çözünüz.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= b_3\end{aligned}$$

a)  $b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = -1$   
b)  $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 1$   
c)  $b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = 0$

15. Örnek 2 de verilen yöntem sonsuz çoklukta çözümü olan lineer sistemler içinde kullanılabilir. Bunu kullanarak aşağıdakileri çözünüz.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -1\end{aligned} \\ \text{b)} & \begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 0\end{aligned}\end{array}$$

Aşağıdaki 16-19 Alıştırmalarda verilen sistemlerin anlamlı olabilmesi için  $b$  lerin sağlaması gereken koşulları bulunuz.

16.  $6x_1 - 4x_2 = b_1$

$$3x_1 - 2x_2 = b_2$$

17.  $x_1 - 2x_2 + 5x_3 = b_1$

$$\begin{aligned}4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3\end{aligned}$$

18.  $x_1 - 2x_2 - x_3 = b_1$

$$\begin{aligned}-4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= b_3\end{aligned}$$

19.  $x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = b_1$

$$\begin{aligned}-2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= b_4\end{aligned}$$

20. Aşağıdaki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

matrislerini ele alalım.

a)  $AX = X$  eşitliğinin  $(A - I).X = 0$  olarak yazılabileceğini ve bunu kullanarak  $X$  için  $AX = X$  eşitliğini çözüntüz.

b)  $AX = 4X$  eşitliğini çözüntüz.

21. Aşağıdaki matris denklemini  $X$  için çözüntüz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Aşağıdaki her bir sistemi aşikar olmayan bir çözümtünün olup olmadığını belirleyiniz. Daha sonra, verilen matrisin tersinir olup olmadığına hesaplama yapmadan karar veriniz.

a)  $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$

$$5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 = 0$$

$$3x_4 = 0$$

b)  $5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$

$$2x_3 - x_4 = 0$$

$$x_3 + x_4 = 0$$

$$7x_4 = 0$$

23.  $n$  bilinmeyen ve  $n$  denklemden oluşan  $AX = 0$  homojen sisteminin sadece aşikar çözümleri olsun.  $k$  herhangi bir pozitif tamsayı için,  $A^k X = 0$  sisteminde sadece aşikar çözümlerinin var olduğunu gösteriniz.

24.  $n$  bilinmeyen ve  $n$  denklemden oluşan  $AX = 0$  homojen sistemi ve  $Q$  bir tersinir matris olsun.  $AX = 0$  sisteminin sadece aşikar çözümlerinin var olması için gerek ve yeter koşul  $(QA)X = 0$  sisteminin sadece aşikar çözümlerinin var olduğunu gösteriniz.