MAT 209 OLASILIK ALIŞTIRMALAR 3 ve ÇÖZÜMLERİ

1.) $f(x) = \begin{cases} c\left(\frac{1}{3}\right)^x & , x = 0,1,2,\dots \\ 0, & , \quad d.d. \end{cases}$

fonksiyonunun olasılık fonksiyonu olabilmesi için c ne olmalıdır?

2.) $f(x) = \begin{cases} cx, & x = 0,2,3,4,5 \\ x, & diğer\ değerler \end{cases}$

olasılık fonksiyonu veriliyor.

a) c yi bulunuz
b) F(x) i bularak grafiğini çiziniz

3.) 4 sporcunun bulunduğu bir kafilede bayan sporcuların sayısı X şans değişkeni ile ifade ediliyor. Buna göre olasılık fonksiyonunu yazınız.

4.) Sürekli X rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0 \ , & dd \end{cases}$

ile verilmektedir. Buna göre

a) c sabitinin değeri nedir?
b) F(x) i oluşturunuz
c) $P\left(x \geq \frac{1}{2} \middle|\ x \leq \frac{3}{4}\right)$ olasılığını hesaplayınız.

5.) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^x, & x = 0,1,2 \dots \\ 0 & , \ diğer\ durumlar \end{cases}$

veriliyor. Buna göre

i) F(x) i bulunuz

$ii)$ $P(x > m + r \mid x > m) = P(x \geq r)$ koşulunu sağlayınız. $(m, r \geq 0\ ve\ m, n \in \mathbb{R})$

6.) X sürekli şans değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3-x), & 0 < x < 3 \\ 0, & Diğer \end{cases}$

olarak verilmiştir. Buna göre

$P(0 < x < 1), P(1 \leq x \leq 2), P(x \geq 1)\ \ ve\ P(x < 2)$ olasılıklarını hesaplayınız

7.) Dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

olarak verilen X şans değişkeni için $P(X > 3|\ 2 < x < 5)$ değerini hesaplayınız

8.) X değişkenine ait dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{4}{x^2}, & x > 2 \\ 0, & x \leq 2 \end{cases}$$

şeklinde veriliyor. Buna göre

a) $P(X \leq 4), P(X \geq 8), P(2 < X < 5)$ olasılıklarını bulunuz
b) Yoğunluk fonksiyonunu bularak her iki fonksiyonun da grafiklerini çiziniz

9.) Sürekli X rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{2}x, \qquad 0 \leq x \leq \sqrt{2}$$

ile veriliyor. X'den n=2 büyüklüğünde X_1, X_2 gibi rastgele bir örnek çekilmektedir. Bir ve yalnız birinin 1'den daha büyük olmasının olasılığı nedir?

10.) $P(Tura) = \frac{3}{4}$ ve $P(Yazı) = \frac{1}{4}$ şeklinde hileli olan bir para üç kez atılıyor. X peş peşe gelen turaların sayısını gösteren şans değişkeni olsun. X'in dağılımını, beklenen değerini, varyansını ve standart sapmasını bulunuz

11.) Hilesiz bir para bir yazı ya da peş peşe dört tura gelene kadar atılıyor. X atış sayısını gösteren şans değişkeni olmak üzere E(X) nedir?

12.) X şans değişkeninin olasılık fonksiyonu 0<r<1 olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} (1-r)r^x, & x = 0,1,2 \ldots \\ 0, & dd \end{cases}$$

şeklinde verilmiştir. Buna göre

i) Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

ii) Beklenen değerini hesaplayınız

iii) Varyansını hesaplayınız

13.) r>0, A>0 parametreli Pareto dağılışının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} rA^r \dfrac{1}{x^{r+1}}, & x \geq A \\ 0, & x < A \end{cases}$$

şeklindedir. Buna göre beklenen değeri hesaplayınız

14.) Bir bilgisayarın tamiri için gerekli süre saat olarak bir şans değişkeni ile ifade edilecek olursa olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & dd \end{cases}$$

ile veriliyor.

Tamir ücretinin (YTL) zamana bağlı olarak ifadesi ise X zaman olmak üzere

$$T(X) = 40 + 30\sqrt{X}$$

ise tamir için ödenecek ortalama ücreti hesaplayınız

15.) 0<a, b<1 olmak üzere $f(x) = a^x - b^{-x}$ x=0,1,2,… olasılık fonksiyonu için

a) a ile b arasında bir bağıntı bulunuz

b) Beklenen değeri bulunuz

c) Varyansı beklenen değer cinsinden yazınız

16.) Düzgün bir zar bir kez atılmaktadır. X şans değişkeni, zar 1 gelirse 1; aksi taktirde 0 değerini almaktadır. $M_x(t)$ yi bulunuz ve X in başlangıç noktasına göre ilk üç momentini hesaplayınız?

17.) X rastlantı değişkeninin olasılık fonksiyonu, 0<p<1 olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p, & x = 0 \end{cases}$$

dir. Buna göre

a) X in moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz?

b) X in sıfır üzerinden hesaplanan r-inci momentini bulunuz?

c) Sıfır üzerinden hesaplanan momentler yardımıyla X in varyansını hesaplayınız?

18.) Olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor. $M_x(t)=E(e^{xt})$ nedir?

X	1	2	4	7
f(x)	1/4	3/8	1/8	1/4

19.) X rastgele değişkeni için $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$ $x = 0,1,2,3$ olasılık fonksiyonu verilsin. Buna göre $M_x(t)=E(e^{xt})$=?

20.) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0 & , diğer \end{cases}$

yoğunluk fonksiyonu verilen X şans değişkeninin moment türeten fonksiyonunu bulunuz.

21.) X rastlantı değişkeninin ortalaması $\mu = 8$ ve standart sapması $\sigma = 0{,}7$ dir. Buna göre $P(|x-8| \geq 4)$ olasılığının üst sınır değerini bulunuz.

22.) Bir otomobil servisine bir günde gelen araç sayısı X şans değişkeni ile tanımlanıyor. $\mu = 100$ ve $\sigma = 16$ olduğuna göre

a) $P(68 \leq x \leq 132)$ olasılığının minimum değerini,

b) $P(|x-100| \geq 24)$ olasılığının maksimum değerini hesaplayınız.

23.) $Y = -X$ dir. Y rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu, X rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu cinsinden ifade ediniz.

24.) $M_X(t) = e^{3t+8t^2}$ $ve\ Z = \frac{1}{4}(X-3)$ olsun. z'nin moment türeten fonksiyonu nedir? E(Z), $E(Z^2)$, $Var(Z)$ değerleri nedir?

25.) $M_x(t) = \dfrac{1}{1-t}, \qquad t < 1$

veriliyor. $Y = 5 - 3X$ şans değişkeni için $M_Y(t)$ değerini hesaplayınız.

26.) $var\,(X+Y),\ var(X-Y),\ orv\,(X+Y,\ X-Y)'yi$ X ile Y'nin varyansları ve ortak varyansı cinsinden yazın.

27.) $var(X_1) = 5,\ var(X_2) = 4,\ var(X_3) = 7,\ orv(X_1, X_2) = 3,\ orv(X_1, X_3) = -2$ ise, $X_2\ ile\ X_3$ de bağımsızsa, $Y_1 = X_1 - 2X_2 + 3X_3\ \ ile\ Y_2 = -2X_1 + 3X_2 + 4X_3$' ün ortak varyansını bulun

28.) (a) $a < X \leq b$ koşuluyla X sürekli rastsal değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğunu gösterin:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

(b) (a)'daki bulgunun x'e göre türevini alarak $a < X \leq b$ verilmişken X'in koşullu olasılık yoğunluğunu bulup aşağıdaki ifadenin doğruluğunu gösterin:

$$E[u(X) \mid a < X \leq b] = \frac{\int_a^b u(x)f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

ÇÖZÜMLER

1.) $\forall x\ için\ 0 \leq f(x) \leq 1$ olmalıdır. $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ifadesi $\forall x$ için sıfırdan büyüktür

$$\sum_{x_i} f(x_i) = 1$$

olmalı. Dolayısıyla

$$\sum_x c\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{x=0}^{n} c\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu da bir geometrik seri toplamıdır. O halde

$$\lim_{n\to\infty} c\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = 1$$

olup

$$\frac{3c}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

olarak bulunur.

2.) a) $c \geq 0\ ve\ f(x) \geq 0$

$$\sum_{x=0,2,3,4,5} f(x) = 1 \Rightarrow c.0 + c.2 + c.3 + c.4 + c.5 = 1$$

$$\Rightarrow 14c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{14}$$

olarak bulunur. Buna göre

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{14}, & x = 0,2,3,4,5 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

demektir.

b)

X	0	2	3	4	5
F(x)	0	2/14	5/14	9/14	1

Buna göre F(x) aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sum x}{14}, & x = 0,2,3,4,5 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

3.) X bayan sporcuların sayısını göstersin. Buna göre;

f(0) : Hiç bayan sporcunun olmaması olasılığı = 1/16

f(1) : 1 bayan sporcunun olması olasılığı = 4/16

f(2) : 2 bayan sporcunun olması olasılığı = 6/16

f(3) : 3 bayan sporcunun olması olasılığı = 4/16

f(4) : Hepsinin bayan sporcu olması olasılığı = 1/16

olur. Buna göre

X	0	1	2	3	4
f(x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

olasılık fonksiyonu tablosu oluşturulur.

4.) a) f(x)'in bir X rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için;

i) $f(x) \geq 0$

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} cx(1-x)dx = 1$$

olmalıdır. Buradan;

$$c\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = 1 \Rightarrow c = 6$$

olmalıdır. Buna göre dağılım fonksiyonu oluşturulabilir.

$$b)\ F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$c)\ P\left(x \geq \frac{1}{2} \mid x \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{P\left(x \geq \frac{1}{2}, x \leq \frac{3}{4}\right)}{P\left(x \leq \frac{3}{4}\right)} = \left(6\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x(1-x)dx\right) \Big/ \left(6\int_{0}^{\frac{3}{4}} x(1-x)dx\right)$$

$$= \frac{11}{27}$$

bulunur. Diğer bir çözüm olarak

$$P\left(x \geq \frac{1}{2} \mid x \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{P\left(x \geq \frac{1}{2}, x \leq \frac{3}{4}\right)}{P\left(x \leq \frac{3}{4}\right)} = \frac{F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{F\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{11}{27}$$

bulunur.

5.) ***i.)*** $F(x)=\sum_{t=0}^{x}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{t}=\frac{1}{3}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right\}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1-(2/3)^{x+1}}{1-(2/3)}\right)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\quad ,x=0,1,2,\ldots$$

ii) $P(x>m+r\mid x>m)=\frac{P(x>m+r)}{P(x>m)}=\frac{1-P(x\leq m+r)}{1-P(x\leq m)}=\frac{1-F(m+r)}{1-F(m)}$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{m+r}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{m}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{r}=1-\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{r}\right\}$$

$$=1-P(x\leq r-1)=P(x\geq r)$$

6.) $P(0<x<1)=\int_{0}^{1}\frac{2}{9}(3-x)dx=\frac{2}{9}\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{5}{9}$

$P(1\leq x\leq 2)=\int_{1}^{2}\frac{2}{9}(3-x)dx=\frac{2}{9}\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{3}$

$P(x\geq 1)=\int_{1}^{3}\frac{2}{9}(3-x)dx=\frac{2}{9}\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{3}=\frac{4}{9}$

7.) $P(X>3\mid 2<x<5)=\frac{P(x>3\ \cap\ 2<X<5)}{P(2<X<5)}=\frac{P(3<X<5)}{P(2<X<5)}=\frac{F(5)-F(3)}{F(5)-F(2)}=\frac{4}{9}$

8.) $F'(x)=f(x)\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)=\frac{8}{x^3}$

bulunur.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{8}{x^3}, & x>2\\ 0, & x\leq 2\end{cases}$$

olur.

$a)$ $P(X\leq 4)=F(4)=1-\frac{1}{16}=0{,}75$

$P(X\geq 8)=1-P(X<8)=1-F(8)=\frac{1}{16}$

$$P(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = \frac{21}{25}$$

bulunur.

9.) X_1 ve X_2 nin bağımsız oldukları dikkate alınarak;

$$P = P(X_1 > 1, X_2 \leq 1) + P(X_1 \leq 1, X_2 > 1)$$

$$= P(X_1 > 1).P(X_1 \leq 1) + P(X_1 \leq 1).P(X_2 > 1)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx\right]\left[\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\right] + \left[\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\right]\left[\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\right]\left[\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx\right] = \frac{3}{8}$$

10.) X şans değişkeninin örnek uzayı

$S = \{TTT, TTY, TYT, YTT, YYT, TYY, YTY, YYY\}$ şeklindedir.

Buna göre X'in dağılımı şöyle olur:

X_i	0	1	2	3
$f(x_i)=P(x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$

Buradan beklenen değer,

$$\mu = E(x) = 0.\frac{1}{64} + 1.\frac{18}{64} + 2.\frac{18}{64} + 3.\frac{27}{64} = \frac{135}{64} = 2{,}1$$

$$E(X^2) = 0.\frac{1}{64} + 1.\frac{18}{64} + 4.\frac{18}{64} + 9.\frac{27}{64} = \frac{333}{64} = 5{,}2$$

bulunur. Buradan

$$Varyans = \sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = 5{,}2 - 2{,}1^2 = 0{,}8$$

$$Standart\ Sapma = \sigma = \sqrt{0{,}8} = 0{,}9$$

olarak elde edilir.

11.) Örnek uzayı $\{Y, TY, TTY, TTTY, TTTT\}$ şeklindedir. Buna göre X'in değer kümesi $\{1,2,3,4\}$ olur. Yani en az bir, en çok dört atışta istenilen sonuca varılır.

$$f(1) = P(Y) = \frac{1}{2}$$
$$f(2) = P(TY) = \frac{1}{4}$$
$$f(3) = P(TTY) = \frac{1}{8}$$
$$f(4) = P(TTY) + P(TTTT) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

olur. Buna olasılık fonksiyonu

X_i	1	2	3	4
$f(x_i)=P(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Bulunur. O halde

$$EX) = 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4}3.\frac{1}{8} + 4.\frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 1{,}875$$

olur.

12.) $i)$ $F(x) = \sum_{i=0}^{x}(1-r)r^t = (1-r)\{1 + r^2 + r^3 + \cdots + r^x\}$

$$= (1-r)\left(\frac{1-r^{x+1}}{1-r}\right) = (1-r^{x+1}), \quad x = 0,1,2 \ldots$$

$$ii)\ E(x) = (1-r)\sum_{x=0}^{\infty} xr^x = (1-r)r\left(\sum_{x=1}^{\infty} xr^x\right)$$
$$= (1-r)r\frac{d}{dr}\left(\sum_{x=1}^{\infty} r^x\right)$$
$$= (1-r)r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{1-r}\right) = \frac{r}{1-r}$$

$$iii)\ Var(x) = E(x^2) - [E(x)^2]$$

$$E(x)^2 = (1-r)\sum_{x=0}^{\infty} x^2 r^x = (1-r)r\sum_{x=}^{\infty} x(xr^{x-1})$$
$$= (1-r)r\frac{d}{dr}\left(\sum_{x=1}^{\infty} x\, r^x\right)$$
$$= (1-r)r\frac{d}{dr}\left(r\sum_{x=1}^{\infty} xr^{x-1}\right)$$
$$= (1-r)r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\sum_{x=1}^{\infty} r^x\right)$$

$$= (1-r)r\frac{d}{dr}\left(r\frac{1}{(1-r)^2}\right) = \frac{r(1+r)}{(1-r)^2}$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)^2] = \frac{r(1+r)}{(1-r)^2} - \frac{r^2}{(1-r)^2} = \frac{r}{(1-r)^2}$$

13.) $E(x) = \int_A^\infty xf(x)dx = rA^r \int_A^\infty x\frac{1}{x^{r+1}}dx = rA^r \int_A^\infty x^{-r}dx = rA^r \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\Big|_A^\infty$

$$= \lim_{B\to\infty} rA^r \frac{B^{-r+1}}{-r+1} - rA^r \frac{A^{-r+1}}{-r+1} = 0 - \frac{rA}{-r+1} = \frac{rA}{r-1}$$

olur.

14.) $E\left(40+30\sqrt{x}\right) = 40 + 30E\left(\sqrt{X}\right) = 40 + 30\int_0^2 \frac{1}{2}\sqrt{X}dx = 40 + 20\sqrt{2} \cong 68,28$

15.) $i)$ $\sum_{x=0}^\infty (a^x - b^{-x}) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^\infty a^x - \sum_{x=0}^\infty b^{-x} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-a} + \frac{b}{1-b} = 1 \Rightarrow a = \frac{b}{2b-1}$$

$ii)$ $E(x) = \sum_{x=0}^\infty x^2(a^x - b^{-x}) = a\sum_{x=1}^\infty xa^{x-1} + b\sum_{x=1}^\infty (-x)b^{-x-1}$

$$= a\frac{d}{da}\left(\sum_{x=1}^\infty a^x\right) += b\frac{d}{db}\left(\sum_{x=1}^\infty b^{-x}\right)$$

$$= a\frac{d}{da}\left(\frac{a}{1-a}\right) + b\frac{d}{db}\left(\frac{b^{-1}}{1-b^{-1}}\right)$$

$$= \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{b}{(1-b)^2} = \frac{2b}{b-1}$$

$iii)$ $E(x^2) = \sum_{x=0}^\infty x^2(a^x - b^{-x}) = \sum_{x=1}^\infty x(x-1)(a^x - b^{-x}) + \sum_{x=1}^\infty x(a^x - b^{-x})$

$$= a^2\sum_{x=2}^\infty x(x-1)a^{x-2} - b\sum_{x=2}^\infty (-x)(-x+1)b^{-x-1} + E(x)$$

$$= a^2\frac{d^2}{da^2}\left(\sum_{x=2}^\infty a^x\right) - b\frac{d^2}{db^2}\left(\sum_{x=2}^\infty b^{-x+1}\right) + \frac{2b}{b-1}$$

$$= a^2 \frac{d^2}{da^2}\left(\frac{a^2}{1-a}\right) - b\frac{d^2}{db^2}\left(b^{-1}\frac{1}{1-b^{-1}}\right) + \frac{2b}{b-1}$$
$$= \frac{2b^2(2b-1)-2b}{(b-1)^3} + \frac{2b}{b-1}$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)^2] = \frac{2b^2}{(b-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{(2b)^2}{(1-b)^2}\right) = \frac{1}{2}\big(E(x)\big)^2$$

bulunur.

16.) X'in olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1 \\ \frac{5}{6}, & x = 0 \end{cases}$$

dir.

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \frac{5+e^t}{6}$$

olur. Dolayısıyla

$$M'_x(t) = M''_x(t) = \cdots = M^{(n)}{}_x(t) = \frac{1}{6}e^t$$

olur. Buna göre

$$m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{6}$$

bulunur.

17.) $a)$ $M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} f(x) = e^0 f(0) + e^1 f(1)$

$$= (1-p) + e^t.p = p\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right) + (1-p)$$
$$= 1 + p\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)$$

b) X'in sıfır üzerinden hesaplanan r-inci momenti,

$$m_r = E(X^r) = \sum_{x=0}^{1} x^r f(x) = 0.(1-p) + 1.(1-p) = p$$

c) $Var(X) = m_2 - (m_1)^2 = p - p^2 = p(1-p)$ dir.

18.) $M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{xt} f(x)$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = e^t\frac{1}{4} + e^{2t}\frac{3}{8} + e^{4t}\frac{1}{8} + e^{7t}\frac{1}{4}$$

$$M_x'(t) = e^t\frac{1}{4} + e^{2t}\frac{3}{4} + e^{4t}\frac{1}{2} + e^{7t}\frac{7}{4} \quad ve \quad M_x'(0) = \frac{13}{4}$$

$$M_x''(t) = e^t\frac{1}{4} + e^{2t}\frac{3}{2} + e^{4t}.2 + e^{7t}\frac{49}{4} \quad ve \quad M''_x(0) = 16 \; olur$$

19.) $M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{3} e^{xt} 2\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 + e^t\frac{2}{3} + e^{2t}\frac{2}{9} + e^{3t}\frac{2}{27}$

olur.

$$M_x'(t) = e^t\frac{2}{3} + e^{2t}\frac{4}{9} + e^{3t}\frac{2}{9} \quad ve \;\; M_x'(0) = \frac{4}{3}$$

$$M_x''(t) = e^t\frac{2}{3} + e^{2t}\frac{8}{9} + e^{3t}\frac{2}{3} \quad ve \;\; M_x''(0) = \frac{20}{9}$$

20.) $M_x(t) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx = \int_0^\infty e^{tx}\left(\frac{1}{2}e^{-x/2}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{\left(t-\frac{1}{2}\right)x}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{t-\frac{1}{2}}e^{\left(t-\frac{1}{2}\right)x}\Big|_0^\infty = (1-2t)^{-1}$$

bulunur.

21.) $P(|x-8| \geq 4)$ ile $P(|x-\mu| \geq k\sigma), P(|x-8| \geq (0{,}7)k)$ karşılaştırılırsa

$$(0{,}7)k = 4, \qquad k = 5{,}71 \quad P(|x-8| \geq 4) \leq \frac{1}{(5{,}71)^2}$$

olur. Buradan;

$\max[P(|x-8| \geq 4)] \approx \%3$ dür.

$P(|x-8| \geq 4) \geq 1 - 0{,}0306 \qquad\qquad \min\,[P(|x-8| \geq 4)] \approx \%97$

22.) $a)$ $P(|x-\mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$, $P(\mu - k\sigma \leq x \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

eşitsizliğinde, veriler yerine yerleştirilir ve $P(68 \leq x \leq 132)$ olasılığı ile karşılaştırılırsa $k = 2$ bulunur. k'nn bu değeri yerine yerleştirilirse

$P(68 \leq x \leq 132) \geq 1 - \frac{1}{2^2}$, $Min[P(68 \leq x \leq 132) = 0{,}75 = \%75]$ dir.

$b)$ $P(|x-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$, $\quad P(|x-100| \geq 16k) \leq \frac{1}{k^2}$ ile

$P(|x-100| \geq 24)$ karşılaştırılırsa;

$16k = 24 \Rightarrow k = 1{,}5$ bulunur.

$P(|x-100| \geq 24) \leq \dfrac{1}{(1{,}5)^2}$, $P(|x-100| \geq 24) \leq 0{,}44$;

$maximum[P(|x-100| \geq 24)] = \%44$ dir.

23.) $M_x(t) = E(e^{tX})$, $M_Y(t) = E(e^{tY})$ dir.

$M_Y(t) = M_{-Y}(t) = E\left(e^{t(-X)}\right) = E\left(e^{(-t)X}\right) = M_x(-t)$

24.) $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E\left(e^{\left(\frac{X+a}{b}\right)(t)}\right) = e^{\frac{at}{b}} E\left[e^{\frac{tX}{b}}\right] = e^{\frac{at}{b}} M_x\left(\frac{t}{b}\right)$

$M_{\frac{X-3}{4}}(t) = E\left(e^{\left(\frac{X-3}{t}\right)t}\right) = e^{\frac{-3t}{4}} E\left[e^{\frac{tX}{4}}\right] = e^{\frac{-3t}{4}} M_x\left(\frac{t}{4}\right)$ olur.

$M_x(t) = e^{3t+8t^2}$ idi. $M_x\left(\frac{t}{4}\right) = e^{3\left(\frac{t}{4}\right)+8\left(\frac{t}{4}\right)^2} = e^{\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{2}}$ olur.

$M_{\frac{X-3}{4}}(t) = e^{\frac{-3t}{4}} e^{\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}$ bulunur.

$$\frac{d\ M_{\frac{X-3}{4}}(t)}{dt} = te^{\frac{t^2}{2}}$$

$$\left.\frac{d\ M_{\frac{X-3}{4}}(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \quad \text{O halde } \mathrm{E(z)} = 0 \text{ olur.}$$

$$\frac{d^2\ M_{\frac{X-3}{4}}(t)}{dt^2} = e^{\frac{t^2}{2}} + t.te^{\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}(1+t^2)$$

$$\left.\frac{d^2\ M_{\frac{X-3}{4}}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = 1 \qquad \text{O halde } \mathrm{E(Z^2)} = 1 \text{ olur.}$$

$$Var(Z) = \mathrm{E(Z^2)} - \left(\mathrm{E(Z)}\right)^2 = 1 - 0^2 = 1 \text{ olur.}$$

25.) $M_Y(t) = E\left[e^{(5-3X)t}\right] = E(e^{-3Xt}.e^{5t}) = e^{5t}E(e^{-3Xt}) = e^{5t}M_x(-3t) = e^{5t}\dfrac{1}{1+3t}$

26.) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Orv\,(X,Y)$

$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\ Orv(X,Y)$

$$Orv(X+Y, X-Y) = Var(X) - Orv(X,Y) + Orv(Y,X) - Var(Y)$$
$$= Var(X) - Var(Y)$$

27.) $Orv\,(Y_1, Y_2) = Orv\,(X_1 - 2X_2 + 3X_3\,, -2X_1 + 3X_2 + 4X_3\,)$

$$= 2Var(X_1) - 6Var(X_2) + 12Var(X_3) - Orv(X_1, X_2) - 2Orv(X_1, X_3) + Orv(X_2, X_3)$$

28.)

(***a***) $F(x|\, a < X \leq b) = P(a < X \leq x \mid a < X \leq b)$

$$= \frac{P(a < X \leq x,\ a < X \leq b)}{P(a < X \leq b)}$$

$$= \frac{P(a < X \leq x)}{P(a < X \leq b)}$$

$$= \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} \qquad e\breve{g}er\ a < x < b$$

(***b***) $f(x \mid a \leq X \leq b) = \dfrac{d\,F(x \mid a < X \leq b)}{dx}$

$$= \frac{f(x)}{F(b) - F(a)}$$

$$= \frac{f(x)}{\int_a^b f(x)dx}$$

$$\Rightarrow E[u(X) \mid a < X \leq b] = \frac{\int_a^b u(x)f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$