

MAT 208 İSTATİSTİK ve OLASILIK II ALIŞTIRMALAR-1

$$1.) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dağılımın

a) Ortalama ve varyans değerlerini bulunuz

b) Moment yaratma fonksiyonunu bularak a-şikkını tekrar çözünüz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} a) \quad \mu = E(X) &= \sum_{x=0}^n x f(x) \\ &= \sum_{x=0}^n x \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n x = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^n x^2 f(x) = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n x^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

$$b) \quad M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^n e^{tx} f(x) = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n e^{tx}$$

$$\mu = \frac{\partial M_x(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \left(\frac{1}{n} \sum_{x=0}^n e^{tx}\right)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n x e^{tx} \Big|_{t=0} = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n x = \frac{(n+1)}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{\partial^2 M_x(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \left(\frac{1}{n} \sum_{x=0}^n x e^{tx}\right)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n x^2 e^{tx} \Big|_{t=0} = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n x^2 = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

2.) Bir tezgahda üretilen parçalar A ve B gibi iki kalite sınıfına ayrılmaktadır. Herhangi bir parçanın, A kalitesinden olma olasılığı 0,8 dir. Bu tezgahda üretilen parçalardan rastgele seçilen 3 parçanın kalitesiyle ilgili dağılışı bulunuz.

ÇÖZÜM

X: Seçilen parçalarda A kalitesinden olanların sayısı olmak üzere, örnek uzay

$S = \{AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB\}$ dir.

Binom dağılışının tipik özellikleri görülmektedir. Yani iki özellikli (iki durumlu) ve tekrarlı denemeler söz konusudur.

$$f(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} (0,8)^x (0,2)^{3-x}, & x = 0,1,2,3 \\ 0 & , \text{ diğ}er \end{cases}$$

Diğ}er bir ifadeyle $(0,8 + 0,2)^3$ açılımından bir terimin karşılığı olan ifadedir. Bu dağılışıta ortalama $n.p=3(0,8)=2,4$ dir. Yani ortalama 2 parçanın A kalitesinde olması beklenir.

$\sigma^2=3(0,8)(0,2)= 0,48$ olur.

3.) 2n tane para atılıyor. n tane yazı, n tane tura gelme olasılığını bulunuz

ÇÖZÜM

$$P(X = n) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2n)!}{n! n! 2^{2n}} = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots}{2n(2n-2) \dots}$$

$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2 \pi n}$ (stirling formülü) kullanılarak

$$P(X = n) = \frac{(2n)^{2n} (e)^{-2n} \sqrt{4 \pi n} \cdot 1}{(n)^{2n} (e)^{-2n} \sqrt{2 \pi n} 2^{2n}} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \text{ bulunur.}$$

4.) 2 para ikisi de tura gelinceye kadar atılıyor. Atış sayısının olasılık fonksiyonu nedir?

ÇÖZÜM

Atış sayısı X şans değışkeni geometrik dağılıma uymaktadır. $X \sim G\left(\frac{1}{4}\right)$ olur. Olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}, & x = 1,2,3, \dots \\ 0 & , \text{ diğ}er \end{cases}$$

5.) Bir futbolcunun attığı her penaltıyı gole çevirme olasılığı 0,8 dir. Çalışma sırasında ilk golü atıncaya kadar penaltı atmaya devam edecektir. Buna göre;

a) İlk golü atıncaya kadar gerekli atış sayısının olasılık fonksiyonu nedir?

b) İlk golü atması için gereken ortalama atış sayısı nedir?

ÇÖZÜM

X, ilk golü atıncaya kadarki atış sayısı olmak üzere, X in dağılışı geometrik dağılıma uyar. Olasılık fonksiyonu,

$\theta = 0,8$ olduğu için

a) $f(x) = (0,8)(0,2)^{x-1}$ $x=1,2,\dots$ şeklindedir.

Buna göre örneğin ilk golün 3. atışta olma olasılığı $f(3) = (0,8)(0,2)^{3-1} = 0,032$ olur. Veya ilk gol için 5 den az atış gerekmesi olasılığı $P(X < 5) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \cong 0,998$

b) $E(x) = \frac{1}{\theta}$ olduğundan $E(x) = \frac{1}{0,8} = 1,2$ beklenen atış sayısıdır.

6.) Bir bölgede yaşayan çocukların belli bir hastalığa yakalanma olasılığı %20 dir. Aynı yerde yaşayan bir grup çocuktan seçilen 12. çocuğun, hastalıklı olan 3. çocuk olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

X şans değişkeni 3. hastalıklı çocuğu tespit etmek için deneme sayısını gösterebilir. Bu durumda X in dağılımı negatif binom dağılımına uyar. Buna göre olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^{x-3}, & x = 3,4, \dots \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

our. Buradan

$$f(12) = \binom{11}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^9 = 0,057 \text{ bulunur.}$$

7.) Bir zarın atışında 1 gelmesi ile ilgileniliyor. Buna göre;

a) Yedinci atışta üçüncü kez 1 gelmesi olasılığı nedir?

b) Üçüncü kez 1 gelmesi için, 5 den az atış gerekmesi olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

X şans değişkeni atılan zar sayısını gösterebilir. Bu durumda X in dağılımı negatif Binom dağılımına uyar.

Buna göre olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{x-3}, & x = 3, 4, \dots \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

a) $x = 7$ için $f(7) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0,034$ olur

b) $P(X < 5) = f(4) + f(3)$

$$= \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 + \binom{2}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0$$
$$\cong 0,0162$$

8.) Bir dokuma ipliği saatte ortalama 0,375 defa kopmaktadır. 8 saat çalışma süresi içinde ipliğin kopma sayısı X şans değişkeni ile ifade ediliyor. Buna göre

a) X in olasılık fonksiyonunu belirleyiniz.

b) İpliğin çalışma süresi içinde en az 2, en çok 4 defa kopma olasılığı nedir?

c) İpliğin çalışma süresi içinde en çok 2 defa kopma olasılığını belirleyiniz?

ÇÖZÜM

X şans değişkeni $\lambda = n\theta = 8(0,375) = 3$ parametrelili Poisson dağılımı göstermektedir. Buna göre olasılık fonksiyonu

a) $P(X = x) = f(x) = \begin{cases} \frac{3^x e^{-3}}{x!}, & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$ şeklindedir.

b) $P(2 \leq x \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$$= \frac{3^2 e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 e^{-3}}{3!} + \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = 3^2 e^{-3} \left(\frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{9}{4!} \right) = \frac{99}{8} e^{-3} \cong 0,62$$

c) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = e^{-3} \left(\frac{1}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{9}{2!} \right) = \frac{17}{2} e^{-3} \cong 0,42$$

9.) Bir telefon santralinde 2 dakikada 7 konuşma olmaktadır. Buna göre birim zamanda konuşma sayısının dağılımını belirleyip;

- a) 1 dakika içinde 1 konuşma olma olasılığı nedir?
 b) 1 dakika içinde en az 3 konuşma olma olasılığı nedir?
 c) Dağılımın moment türeten fonksiyonu nedir?

ÇÖZÜM

X şans değişkeni birim zamandaki (dakika) konuşma sayısını göstermek üzere, Poisson dağılışı söz konusudur. Dağılışın parametresi $\lambda = \frac{7}{2} = 3,5$ dir. Dolayısıyla parametrenin birim zamandaki olay sayısı olarak düşünülmesi mümkündür.

$$P(X = x) = f(x) = \begin{cases} \left(\frac{7}{2}\right)^x e^{-\frac{7}{2}}, & x = 0,1,2, \dots \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$a) f(1) = \frac{7}{2} e^{-\frac{7}{2}} = 0,106$$

$$b) P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [f(0) + f(1) + f(2)] \\ = 1 - 0,321 = 0,679$$

$$c) M_x(t) = e^{\frac{7}{2}(e^t - 1)}$$

10.) Bir şehirde 30.000 kişinin arabası vardır. Bu şehirde araba sahibi olan bir kimsenin bir günde kaza yapma olasılığı 0,00002 ise, bu şehirde aynı günde 5 veya daha fazla kimsenin kaza yapma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

X şans değişkeni 1 günde kaza yapan araba sahibi sayısını göstermek üzere, $n=30.000$ ve $\theta=0,00002$ dolayısıyla $\lambda=n\theta=0,6$ olan Poisson dağılışı gösterir.

$$P(X = x) = f(x) = \begin{cases} \frac{(0,6)^x e^{-0,6}}{x!}, & x = 0,1,2 \dots \\ 0, & \text{Diğer} \end{cases}$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - [f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] \\ = 1 - \left[e^{-0,6} + 0,6e^{-0,6} + \frac{(0,6)^2}{2} e^{-0,6} + \frac{(0,6)^3}{6} e^{-0,6} + \frac{(0,6)^4}{24} e^{-0,6} \right] \\ = 1 - 0,9997 = 0,0003$$

$$11.) \quad f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a < x < b$$

şeklinde verilen dağılımın ortalama ve varyans değerlerini bulunuz?

ÇÖZÜM

$$\mu = E(X) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_a^b \right) = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_a^b \right) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

12.) Bir fabrikada belli bir nedenle 2 saatte bir arıza meydana gelmektedir. Buna göre sabah 8 den sonra ilk arızaya kadar geçecek zamanın dağılışını bulunuz. Ayrıca;

a) Arızasız en az 1 saat çalışma olasılığını hesaplayınız

b) En fazla 4 saat içinde bir arızanın olması olasılığını hesaplayınız?

ÇÖZÜM

X ilk arızaya kadar geçen süre (saat olarak) ve $\alpha = \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \quad x > 0 \quad \text{üstel dağılıştır.}$$

$$E(x) = \frac{1}{\alpha} = 2 \text{ saat (ilk arıza için beklenen ortalama süre)}$$

$$a) P(x > 1) = \int_1^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = e^{-\frac{1}{2}} = 0,606 \text{ bulunur.}$$

Arızasız olarak en çok 4 saat çalışma olasılığı

$$b) P(x \leq 4) = F(4) = \int_0^4 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = 1 - e^{-2} = 0,865$$

13.) Bir okulun telefon santraline, her gün saat 11-12 arasında ortalama 30 telefon gelmektedir. Buna göre saat 11 den sonraki 3 dakika içinde;

a) Hiç telefon gelmemesi

b) 3 telefon gelmesi olasılıklarını bulunuz.

c) Peş peşe gelen 2 telefon arasındaki zamanın 5 dakikayı geçmemesi olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

$\alpha = \frac{30}{60} = 0,5$ (1 dakikaa düşen telefon sayısı) $t = 3$ yani $(0,3]$ aralığı düşünülüyor.

Ortalama $\lambda = \alpha t = 3 \cdot (0,5) = 1,5$ telefon beklenir. Bu şartlar altına Poisson uygulanabilir.

$$a) P(x = 0) = e^{-1,5} = 0,223$$

$$b) P(x = 3) = 0,223 \cdot \frac{(1,5)^3}{6} = 0,125$$

C) Bu defa üstel dağılışa göre düşünülecektir:

$$P(T \leq 5) = F(t) = 1 - e^{(-0,5)5} = 1 - e^{-2,5} \cong 0,92 \text{ bulunur.}$$

$$14.) f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \quad x > 0$$

gamma dağılışının olasılık fonksiyonu ise $\alpha = 2$, $\beta = 2$ için

i) $P(X > 6)$

ii) $P(X \leq 4)$ olasılıklarını hesaplayınız

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} i) P(X > 6) &= \frac{1}{2^2 \Gamma(2)} \int_6^\infty x e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \left\{ -2x e^{-\frac{x}{2}} \Big|_6^\infty + 2 \int_6^\infty e^{-x/2} dx \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 12e^{-3} + 2 \left(-2e^{-\frac{x}{2}} \Big|_6^\infty \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \{ 12e^{-3} + 4e^{-3} \} \\ &= 4e^{-3} \\ &= 0,199 \end{aligned}$$

$$ii) P(X \leq 4) = 1 - P(X > 4) = 1 - 0,41 = 0,59$$