

**MAT 308 İDEAL TEORİSİ**  
**ALİŞTİRMALAR I**

1.  $R$  bir halka olmak üzere,
  - i)  $a \in R$  olmak üzere  $K = \{b \in R \mid ab = ba\}$  kümesi  $R$  halkasının bir althalkasıdır.
  - ii)  $Z(R) = \{b \in R \mid ab = ba, \forall a \in R\}$  kümesine  $R$  halkasının merkezi denir.  $Z(R)$  kümesinin  $R$  halkasının bir althalkası olduğunu gösteriniz.
2.  $R$  birimli bir halka olmak üzere  $A = \{e \in R \mid ea = ae = a, \forall a \in R\}$  kümesinin çarpma işlemine göre bir grup olduğunu gösteriniz.
3.  $R$  halkasının değişmeli olması için gerek ve yeter koşul her  $a, b \in R$  için  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  olmasıdır. İspatlayınız.
4. Aşağıdakileri ispatlayınız.
  - i) Eğer birimli bir halkanın birden çok elemanı varsa, birimi sıfırdan farklıdır.
  - ii)  $e \in R$  idempotent eleman ve  $e \neq 0$  ise  $e$  nilpotent olamaz.
  - iii)  $R$  birimli bir halka olmak üzere, tersinir olan bir eleman sıfır bölen olamaz.
  - iv) Birimli ve sıfırdan farklı sıfır böleni olmayan bir halkada idempotent elemanlar sadece sıfır ve birim elemandır.
5.  $R$  değişmeli bir halka,  $a, b \in R$  nilpotent elemanlar ise  $a + b$  elemanının da nilpotent olduğunu gösteriniz.
6. Bir  $R$  halkasında aşağıdakiler denktir. Gösteriniz.
  - i)  $R$  halkasında sıfırdan farklı nilpotent eleman yoktur.
  - ii) Eğer  $a \in R$  için  $a^2 = 0$  ise  $a = 0$  dır.
7.  $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$  kümesi için aşağıdakileri gösteriniz.
  - i)  $S$  kümesi,  $M_2(\mathbb{Z})$  halkasının bir alt halkasıdır.
  - ii)  $S$  halkası bir sol birime sahiptir fakat herhangi bir sağ birime sahip değildir.
  - iii)  $S$  halkası sonsuz sayıda birbirinden farklı sol birime sahiptir.
8.  $R$  birimli, değişmeli bir halka olmak olsun. Eğer  $a \in R$  tersinir ve  $b \in R$  nilpotent ise  $a + b$  tersinirdir. İspatlayınız.

9.  $R$  sıfırdan farklı nilpotent elemanı olmayan bir halka ve  $e \in R$  idempotent eleman olsun. Bu durumda her  $x \in R$  için  $ex = xe$  dir. Gösteriniz.
10.  $R$  birden fazla elemanı olan bir halka ve sıfırdan farklı her bir  $a \in R$  için  $aba = a$  olacak şekilde bir tek  $b \in R$  olsun. Buna göre aşağıdakileri gösteriniz.
- i)  $R$  halkasının sıfırdan farklı sıfır böleni yoktur.
  - ii)  $bab = b$  dir.
  - iii)  $R$  halkası birimlidir.
  - iv)  $R$  halkası bir bölüm halkasıdır.