2.BÖLÜM
2.1 ALIŞTIRMALAR

Alıştırma 1-10 daki determinantları hesaplayınız.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$ **4)** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 6 \\ 4 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{vmatrix}$ **6)** $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ **7)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ **9)** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix}$ **10)** $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$

11) $\det(A) = 0$ yapan λ değerlerini bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

12) Aşağıdaki determinantı hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} 4 & -9 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

13) Determinant tanımını kullanarak aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$

sağlayan x bulunuz.

15) $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta-\cos\theta & \sin\theta+\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$ determinantının θ dan bağımsız olduğunu gösteriniz.

16) Bir sütunu sıfır olan A matrisi için $\det(A) = 0$ olduğunu gösteriniz.

2.2 ALIŞTIRMALAR

1) Determinant açılımını kullanarak aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

Alıştırma 2-9 daki matrislerin determinantlarını satır eşolon biçimine getirerek hesaplayınız.

2) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ **4)** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **6)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ **7)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **9)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ olmak üzere aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

11) Satır indirgeme işlemlerini kullanarak

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ olduğunu gösteriniz.

12) Aşağıdaki determinantların sonuçlarını doğrulayınız.

a) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$

b) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

2.3 ALIŞTIMALAR

1) Aşağıdaki matrislerde $det(A) = det(A^T)$ olduğunu gösteriniz.

a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

2) Aşağıdaki matrislerde $det(AB) = det(A)det(B)$ olduğunu gösteriniz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Determinant özelliklerini kullanarak neden $det(A) = 0$ olduğunu

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisi için gösteriniz.

4) Hangilerinin tersinir matris olduğunu bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5) A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ olsun ve kabul edelim ki $det(A) = -7$ olsun.

O zaman aşağıdakileri bulunuz.

a) $det(3A)$ b) $det(2A^{-1})$ c) $det((2A)^{-1})$ d) $det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

6) Direkt hesaplama yapmadan $x = 0$ ve $x = 2$ için

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

sağlandığını gösteriniz.

7) Direkt hesaplama yapmadan

$$\det \begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

8) Hesaplama yapmadan aşağıdakini gösteriniz.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

9) Hesaplama yapmadan aşağıdakini gösteriniz.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

10) Hesaplama yapmadan aşağıdakini gösteriniz.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2). \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

11) Hesaplama yapmadan aşağıdakini gösteriniz.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+ta_1 & c_1+rb_1+sa_1 \\ a_2 & b_2+ta_2 & c_2+rb_2+sa_2 \\ a_3 & b_3+ta_3 & c_3+rb_3+sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

12) k nın hangi değerleri için A tersinir değildir?

a) $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

13) α, β ve γ nın hangi değerleri için

$$\begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi tersinir değildir?

14) A ve B, $n\times n$ lik matrisler olsun. O zaman A tersinir matris ise $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$ olduğunu gösteriniz.

2.4 ALIŞTIRMALAR

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ olsun.

a) A nın bütün minörlerini bulunuz.

b) A nın bütün kofaktörlerini bulunuz.

2) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ olsun.

a) $(1,3)$ deki elemanın minör ve kofaktörünü bulunuz.
b) $(2,3)$ deki elemanın minör ve kofaktörünü bulunuz.
c) $(2,2)$deki elemanın minör ve kofaktörünü bulunuz.

d) $(2,1)$deki elemanın minör ve kofaktörünü bulunuz.

3) Alıştırma 1 deki matrisin determinantını kofaktör yardımıyla aşağıdaki satırlara göre hesaplayınız.
a) birinci satır c) ikinci satır e) üçüncü satır
b) birinci sütun d) ikinci sütun f) üçüncü sütun

4) Alıştırma 1 deki matrisin
a) $adj(A) = ?$
b) Tersini bulunuz.
5) Aşağıdaki matrisin determinantını seçtiğiniz bir satır veya sütuna göre kofaktör yardımıyla hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

6) Aşağıdaki matrisin determinantını seçtiğiniz bir satır veya sütuna göre kofaktör yardımıyla hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

7)Aşağıdaki matrisin determinantını seçtiğiniz bir satır veya sütuna göre kofaktör yardımıyla hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$$

8) Aşağıdaki matrisin determinantını seçtiğiniz bir satır veya sütuna göre kofaktör yardımıyla hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$$

9) Aşağıdaki matrisin determinantını seçtiğiniz bir satır veya sütuna göre kofaktör yardımıyla hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

10) Aşağıdaki matrisin determinantını seçtiğiniz bir satır veya sütuna göre kofaktör yardımıyla hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

11) Teorem 2.4.2 yi kullanarak A nın tersini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

12) Teorem 2.4.2 yi kullanarak A nın tersini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

13) Teorem 2.4.2 yi kullanarak A nın tersini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

14) Teorem 2.4.2 yi kullanarak A nın tersini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

15) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ olsun.

a) Teorem 2.4.2 yi kullanarak tersini bulunuz.

b) Bölüm 1.6 Örnek 4 deki yöntemi kullanarak tersini bulunuz.

16) Cramer's Kuralını uygulayarak aşağıdakini çözünüz.

$$\begin{gathered} 7x_1 - 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{gathered}$$

17) Cramer's Kuralını uygulayarak aşağıdakini çözünüz.

$$\begin{gathered} 4x + 5y = 2 \\ 11x + y + 2z = 3 \\ x + 5y + 2z = 1 \end{gathered}$$

18) Cramer's Kuralını uygulayarak aşağıdakini çözünüz.

$$\begin{gathered} x - 4y + z = 6 \\ 4x - y + 2z = -1 \\ 2x + 2y - 3z = -20 \end{gathered}$$

19) Cramer's Kuralını uygulayarak aşağıdakini çözünüz.

$$\begin{gathered} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + -x_2 = -2 \\ 4x_1 - 3x_3 = 0 \end{gathered}$$

20) Cramer's Kuralını uygulayarak aşağıdakini çözünüz.

$$\begin{gathered} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_4 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \end{gathered}$$

21) Cramer's Kuralını uygulayarak aşağıdakini çözünüz.

$$\begin{gathered} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 \end{gathered}$$

22) Aşağıdaki

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin θ nın her değeri için tersinir olduğunu gösteriniz. Teorem 2.4.2 yi kullanarak A nın tersini bulunuz.

23) Cramer's yöntemi yardımıyla, x, z ve w yi çözmeden y yi çözünüz.

$$\begin{gathered} 4x + y + z + w = 6 \\ 3x + 7y - z + w = 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w = -3 \\ x + y + z + 2w = 3 \end{gathered}$$

24) Alıştırma 23 de verilen $AX = B$ sistemi olsun.

a) Cramer's yöntemi ile çözünüz.
b) Gauss-Jordan eleme yöntemi ile çözünüz.