KÜME TEORİSİ
ALIŞTIRMALAR II

Aşağıdakileri ispatlayınız.

1. Doğal sayılar kümesinin farklı iki ön parçası aynı kuvvette olamaz.
2. Doğal sayılar kümesi sonlu olamaz.
3. Sonlu bir küme, kendisinden farklı hiçbir altkümesi ile aynı kuvvette olamaz.
4. Sayılabilir sonsuz olmayan bir sonsuz kümeden sayılabilir sonsuz veya sonlu küme çıkarılırsa, ilk kümenin kuvveti değişmez.
5. Boş olmayan bir kümenin uygun bir öz altkümesi üzerine birebir olarak resmedilebilmesi için gerek ve yeter koşul o kümenin sonsuz olmasıdır.
6. Sonlu bir M kümesi, N gibi bir altkümesi üzerine birebir olarak resmedilebilirse, $N = M$ dir.
7. Y sayılabilir(sonlu veya sayılabilir sonsuz) bir küme ve $f : X \longrightarrow Y$ birebir bir fonksiyon ise X de sayılabilir bir kümedir.
8. $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kartezyen çarpım kümesinin sayılabilir sonsuz bir küme olduğunu gösteriniz.

   (Y.G: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ f(i,j) = 2^i 3^j$ dönüşümü ve 7. soru kullanılabilir.)
9. A sayılabilir bir küme ve B kümesi de A kümesinin sayılabilir bir altkümesi ise $A - B$ kümesi de sayılabilir bir kümedir.
10. X ve Y sayılabilir iki küme ise $X \times Y$ kümesi de sayılabilir bir kümedir.
11. $f : X \longrightarrow Y$ birebir ve örten bir fonksiyon ise, $g : P(X) \longrightarrow P(Y),\ g(A) = f(A) = \{f(x) | \, x \in A\}$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonu da birebir ve örtendir.
12. X ile Y kümesi aynı kuvvette ise $P(X)$ ile $P(Y)$ kümeleri de aynı kuvvettedir.
13. $(0,1)$ ile $(0,2)$ kümelerinin aynı kuvvette olduğunu gösteriniz. (Y.G: $f(x) = 2x$ fonksiyonu kullanılabilir.)
14. $0 < a < b$ özelliğini sağlayan herhangi iki reel sayı a ve b olmak üzere $(0,1)$ ile (a,b) kümelerinin aynı kuvvette olduğunu gösteriniz.

    (Y.G: $f(x) = a + (b-a)x$ fonksiyonu kullanılabilir.)
15. $(-1,1)$ ve $(0,1)$ kümelerinin aynı kuvvette olduğunu gösteriniz.