

KÜME TEORİSİ
ALİŞTIRMALAR III

1. **a)** $A = \{1, 2, 5, 8\}$ kümesi ile $B = \{1, 2, a, b\}$ kümesi aynı kuvvette midir?
b) $M = \{1, 2, 3\}$ kümesi ile $N = \{1, 2\}$ kümesi aynı kuvvette midir?
2. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.
a) $[0, 1] \sim [2, 5]$
b) $[0, 1] \sim [a, b]$
3. $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ve $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ kümeleri aynı kuvvette midir?
4. A ve B herhangi iki ayrık küme olsun. Buna göre, $(A \times \{1\}) \cap (B \times \{2\}) = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.
5. Her $a \in \mathbb{N}$ doğal sayısı $a = 2^r(2s + 1)$ biçiminde tek türlü yazılabilir. Burada $r, s = 0, 1, 2, \dots$ dir. Buna göre, $M = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere, $(M \times M) \sim \mathbb{N}$ olduğunu gösteriniz.
6. $\mathbb{Q}^+ \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olduğunu gösteriniz.
7. $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ dönüşümünü kullanarak, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$ olduğunu gösteriniz.
8. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.
a) $(0, 1) \sim [0, 1]$ (Y.G: $f(x) = 1 - x$)
b) $(0, 1) \sim (0, 1]$
c) $(0, 1) \sim [0, 1]$
d) $(0, 1) \sim (0, \infty)$ (Y.G: $f(x) = \frac{1}{x} - 1$)
e) $(0, 1) \sim \mathbb{R}$
f) $(0, 1) \cup (2, 3) \sim (0, 1)$
9. Herhangi A, B kümeleri için, $(A \times B) \sim (B \times A)$ olduğunu gösteriniz.
10. $A \times (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$ olduğunu gösteriniz.
11. G ve H sayılabilir sonsuz iki küme olsun. Buna göre, $G \times \{1\}$ kümesi ile $\{2\} \times H$ kümesinin aynı kuvvette olup olmadığını gösteriniz.
12. M_1, M_2 ve M_3 kuvvetleri sırasıyla m_1, m_2 ve m_3 olan ikişer ikişer ayrık kümeler olsun. Buna göre, aşağıdakileri ispatlayınız.
a) $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$
b) $(m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$

c) $m_1m_2 = m_2m_1$

d) $m_1(m_2 + m_3) = m_1m_2 + m_1m_3$

13. Sonlu bir kümenin kardinali n ve doğal sayılar kümesinin kardinali \aleph_0 olmak üzere, aşağıdakileri ispatlayınız.

a) $\aleph_0 + n = \aleph_0$

b) $\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0}_{n \text{ tane}} = \aleph_0$

c) $\underbrace{\aleph_0 \aleph_0 \dots \aleph_0}_{n \text{ tane}} = \aleph_0$