

İDEAL TEORİSİ ALİŞTİRMALAR I

1. R bir halka olmak üzere,
 - i) $a \in R$ olmak üzere $K = \{b \in R \mid ab = ba\}$ kümesi R halkasının bir althalkasıdır.
 - ii) $Z(R) = \{b \in R \mid ab = ba, \forall a \in R\}$ kümesine R halkasının merkezi denir. $Z(R)$ kümesinin R halkasının bir althalkası olduğunu gösteriniz.
2. R birimli bir halka olmak üzere $A = \{e \in R \mid ea = ae = a, \forall a \in R\}$ kümesinin çarpma işlemine göre bir grup olduğunu gösteriniz.
3. R halkasının değişmeli olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in R$ için $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ olmasıdır. İspatlayınız.
4. Aşağıdakileri ispatlayınız.
 - i) Eğer birimli bir halkanın birden çok elemanı varsa, birimi sıfırdan farklıdır.
 - ii) $e \in R$ idempotent eleman ve $e \neq 0$ ise e nilpotent olamaz.
 - iii) R birimli bir halka olmak üzere, tersinir olan bir eleman sıfır bölen olamaz.
 - iv) Birimli ve sıfırdan farklı sıfır böleni olmayan bir halkada idempotent elemanlar sadece sıfır ve birim elemandır.
5. R değişmeli bir halka, $a, b \in R$ nilpotent elemanlar ise $a + b$ elemanının da nilpotent olduğunu gösteriniz.
6. Bir R halkasında aşağıdakiler denktir. Gösteriniz.
 - i) R halkasında sıfırdan farklı nilpotent eleman yoktur.
 - ii) Eğer $a \in R$ için $a^2 = 0$ ise $a = 0$ dır.
7. $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi için aşağıdakileri gösteriniz.
 - i) S kümesi, $M_2(\mathbb{Z})$ halkasının bir alt halkasıdır.
 - ii) S halkası bir sol birime sahiptir fakat herhangi bir sağ birime sahip değildir.
 - iii) S halkası sonsuz sayıda birbirinden farklı sol birime sahiptir.
8. R birimli, değişmeli bir halka olmak olsun. Eğer $a \in R$ tersinir ve $b \in R$ nilpotent ise $a + b$ tersinirdir. İspatlayınız.

9. R sıfırdan farklı nilpotent elemanı olmayan bir halka ve $e \in R$ idempotent eleman olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $ex = xe$ dir. Gösteriniz.
10. R birden fazla elemanı olan bir halka ve sıfırdan farklı her bir $a \in R$ için $aba = a$ olacak şekilde bir tek $b \in R$ olsun. Buna göre aşağıdakileri gösteriniz.
- i) R halkasının sıfırdan farklı sıfır böleni yoktur.
 - ii) $bab = b$ dir.
 - iii) R halkası birimlidir.
 - iv) R halkası bir bölüm halkasıdır.