

İDEAL TEORİSİ
ALİŞTIRMALAR II

1. $S = \left\{ \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2n & 0 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi verilsin. Buna göre

- i) S kümesinin $M_2(\mathbb{Z})$ halkasının bir althalkası olduğunu gösteriniz.
- ii) S , \mathbb{Z} halkasının bir izomorfik görüntüsüdür. İspatlayınız.

2. Eğer R halkasının her elemanı idempotent eleman ise bu halkaya **Boolean halkası** denir. Buna göre aşağıdakileri gösteriniz:

- i) Boolean halkasının karakteristiği ikidir.
- ii) Boolean halkası değişmelidir.
- iii) İki elemandan fazla elemanı bulunan bir Boolean halkasında sıfır bölen eleman vardır.

3. R birimli değişmeli bir halka olsun. Bu durumda

$$Z(M_3(R)) = \{aI_3 \mid a \in R\}$$

olduğunu gösteriniz.

4. \mathbb{Z}_6 halkasından $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ halkasına bir izomorfizm tanımlayınız.

5. S_i ($i = 1, 2, 3$) keyfi halkalar olmak üzere

$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \cong S_2 \oplus S_1 \oplus S_3$$

olduğunu gösteriniz.

6. A, B bir R halkasının idealleri ve $A \subseteq B$ olsun. Bu durumda A , B halkasının bir sağ idealidir. Gösteriniz.

7. Değişmeli bir halkadaki tüm nilpotent elemanların kümesi bir idealdir. Gösteriniz.

8. Bir R halkasının birimli olan S halkası içine gömülmesinden faydalanarak (ilgili bölüme bakınız) R halkasındaki bir idealin (sağ idealin) S halkasında da bir ideal (sağ ideal) olduğunu gösteriniz.

9. R bir halka olmak üzere $K = \{n \mid n \in \mathbb{Z}, na = 0, \forall a \in R\}$ kümesi \mathbb{Z} halkasının bir idealidir. Gösteriniz.

10. (2) \cup (3) kümesinin \mathbb{Z} halkasının bir ideali olup olmadığını inceleyiniz.

11. R bir halka, $A, B, C \subset R$ sağ idealler ve $A \subseteq B \cup C$ ise $A \subseteq B$ veya $A \subseteq C$ olduğunu gösteriniz.

12. $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ cismi \mathbb{R} reel sayılar cismi üzerinde bir cebirdir. Gösteriniz.
13. R birden fazla elemanı olan bir halka ve her sıfırdan farklı $a \in R$ için $aR = R$ ise R bölümlü halkadır. Gösteriniz.
14. A, R halkasında bir ideal (sağ ideal) ise $M_n(A)$ kümesi de $M_n(R)$ halkasının bir idealidir (sağ idealidir). İspatlayınız.