## İDEAL TEORİSİ
## ÖDEV SORULARI

1. $R$ değişmeli bir halka, $a, b \in R$ nilpotent elemanlar ise $a+b$ elemanının da nilpotent olduğunu gösteriniz.

2. $R$ birden fazla elemanı olan bir halka ve sıfırdan farklı her bir $a \in R$ için $aba = a$ olacak şekilde bir tek $b \in R$ olsun. Buna göre aşağıdakileri gösteriniz.

   i) $R$ halkasının sıfırdan farklı sıfır böleni yoktur.

   ii) $bab = b$ dir.

3. $R$ bir halka, $x$ bir bilinmeyen olmak üzere,

$$R[[x]] = \left\{ f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \,\middle|\, a_k \in R \right\}$$

kümesi, $f, g \in R[[x]]$ için

$$\begin{aligned} f+g &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k \\ f.g &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k, \qquad d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \end{aligned}$$

işlemlerine göre bir halkadır. Gösteriniz.

4. $S$, $S_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ halkalarının direk toplamı olmak üzere,

$$S \text{ birimlidir} \Leftrightarrow S_i \text{ halkaları birimlidir.}$$

5. $\mathbb{Z}_6$ halkasından $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ halkasına bir izomorfizm tanımlayınız.

6. $S_i$ $(i = 1, 2, 3)$ keyfi halkalar olmak üzere

$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \cong S_2 \oplus S_1 \oplus S_3$$

olduğunu gösteriniz.

7. Değişmeli bir halkadaki tüm nilpotent elemanların kümesi bir idealdir. Gösteriniz.

8. $(2) \cup (3)$ kümesinin $\mathbb{Z}$ halkasının bir ideali olup olmadığını inceleyiniz.

9. $\mathbb{C} = \left\{ a + bi \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \right\}$ cismi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir cebirdir. Gösteriniz.

10. $R$ bir halka olmak üzere, $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $a \in R$ için

$$(m+n)a = ma + na \text{ dir.}$$

İspatlayınız.