MAT 208 ALIŞTIRMALAR 2

8. 1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sonsuz bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem oluşturuyorsa, Teorem 4.15'in sonucunu kullanarak r=1,2,...,n için, $Cov(X_r - \overline{X}, \overline{X}) = 0$ olduğunu gösterin.,

ÇÖZÜM
$$\begin{aligned} Cov(X_r - \overline{X}, \overline{X}) &= Cov(X_r, \overline{X}) - Cov(\overline{X}, \overline{X}) \\ &= Cov\left(X_r, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - Var(\overline{X}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Cov(X_r, X_k) - \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = 0 \end{aligned}$$

Çünkü $Cov(X_r, X_k) = \begin{cases} 0, & eğer\ r \neq k \\ \sigma^2, & eğer\ r = k \end{cases}$

8. 2. $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ ile $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{1n_2}$ bağımsız rassal değişkenlerse ve bunlardan ilk n_1'i ortalaması μ_1 ve varyansı $\sigma_1{}^2$ olan sonsuz bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem, öteki n_2'si de ortalaması μ_2 ve varyansı $\sigma_2{}^2$ olan sonsuz bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem oluşturuyorsa, Teorem 4.14 ile sonucunu kullanarak

$(\boldsymbol{a}) E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$

$(\boldsymbol{b}) Var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}$

olduğunu gösterin.

ÇÖZÜM $\overline{X}_1 \sim \left(\mu_1, \frac{\sigma_1{}^2}{n_1}\right)$ ve $\overline{X}_2 \sim \left(\mu_2, \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}\right)$ Teorem 8.1 den

$(\boldsymbol{a})\ E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E\ (\overline{X}_1) - E\ (\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$

$(\boldsymbol{b})\ Var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = Var(\overline{X}_1) + Var(\overline{X}_1) - 2\,\underbrace{Cov(\overline{X}_1, \overline{X}_2)}_{0}$

$$= \frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}$$

8. 4. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, θ anakütle katsayısı ile aynı Bernoulli dağılımına uyan rassal değişkenlerse $\overline{X}$, n denemedeki $\hat{\theta}$ ile simgelenen başarı sayısıdır.

(a) $E(\hat{\theta}) = \theta$

(b) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

olduğunu gösterin.

ÇÖZÜM $X_i \sim Bern(\theta)$ $\mu = \theta$, $\sigma^2 = \theta(1-\theta)$

$\hat{\theta} = \overline{X}$

Teorem 8.1 den

$$E(\hat{\theta}) = E(\overline{X}) = \theta$$

$$Var(\hat{\theta}) = Var(\overline{X}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

8.5 Alıştırma 8.2'deki rassal değişkenlerden ilk n_1 tanesi katsayısı θ_1 olan Bernoulli dağılımına, öteki n_2 tanesi katsayısı θ_2 olan Bernoulli dağılımına uyuyorsa

$(\boldsymbol{a})$ $E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) = \theta_1 - \theta_2$

$(\boldsymbol{b})$ $Var(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) = \dfrac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \dfrac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}$

olduğunu gösterin.

ÇÖ***ZÜM*** $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1} \sim Bern(\theta_1)$

$X_{21}, X_{22}, \dots, X_{1n_2} \sim Bern(\theta_2)$

İki örneklem birbirinden bağımsız

$\hat{\theta}_1 = \dfrac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1} X_{1k} = \overline{X}_1$ $\qquad$ $\hat{\theta}_2 = \dfrac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n_2} X_{2k} = \overline{X}_2$

$E(\overline{X}_1) = \theta_1$ $\qquad$ $E(\overline{X}_2) = \theta_2$

$Var(\overline{X}_1) = \dfrac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}$ $\qquad$ $Var(\overline{X}_2) = \dfrac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}$

O zaman Problem 8.2 den

$$E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) = \theta_1 - \theta_2$$

$$Var(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) = \frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}$$

8.6 Sayfa 263'teki gibi olan yani aynı dağılmış bağımsız Bernoulli rassal değişkenlerinin toplamları olan ikiterimli rassal değişkenlere bakarak, merkezi limit teoremini kullanarak .teorem 6.8' i kanıtlayın

ÇÖ***ZÜM*** $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ $\qquad$ $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim Bern(\theta)$

O zaman $X \sim Binom(n, \theta)$ olur.

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \quad E[\overline{Y}] = \theta \quad Var(\overline{Y}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

Merkezi Limit Teoreminden

$$\frac{\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1) \qquad X = n\overline{Y}$$

$$\frac{X-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} = \frac{n(\overline{Y}-\theta)}{n\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} = \frac{\overline{Y}-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$$

8.13 $1,2,\ldots,N$ tamsayılarından oluşan sonlu anakütleden n büyüklüğünde rassal bir örneklem çekilirse

(***a***) $\overline{X}$ nin ortalamasının $\frac{N+1}{2}$ olduğunu

(***b***)$\overline{X}$ nin varyansının $\frac{(N+1)(N-n)}{12n}$ olduğunu ?österin.

ÇÖZÜM $f(x) = \frac{1}{N} \quad x = 1,2,\ldots,N$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} x = \frac{1}{N}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{1}{N}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{N^2-1}{12}$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ bu sonlu anakütleden alınan örneklem olsun. O zaman

$$E(\overline{X}) = \mu = \frac{N+1}{2} \qquad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

8.15 $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ sonlu anakütle varyansının

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_i^2 - \mu^2$$

biçiminde yazılabileceğini gösterin.

ÇÖZÜM
$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(c_i-\mu)^2 \qquad \mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} c_i = N\mu$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(c_i^2 - 2c_i\mu + \mu^2)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} c_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{N} c_i + N\mu^2\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} c_i^{\,2} - 2N\mu^2 + N\mu^2\right)$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_i^{\,2} - \mu^2$$

8.18 Büyüklüğü aşağıdaki gibi olan sonlu bir anakütleden n=3 büyüklüğünde kaç farklı örneklem çekilebilir?

(a) N=12 **(b)** N=20 **(c)**N= 50

ÇÖZÜM $(a)\ \binom{12}{3}$ $\quad (b)\ \binom{20}{3}$ $\quad (c)\ \binom{50}{3}$

8.19 (a) N=12 büyüklüğündeki sonlu bir anakütleden n=4 büyüklüğünde rassal bir örneklem **(b)** N=2 büyüklüğündeki sonlu bir anakütleden n=5 büyüklüğünde rassal bir örneklem çekildiğinde her bir olanaklı örneklemin olasılığı kaçtır?

ÇÖZÜM $(a)\ \frac{1}{\binom{12}{4}}$ $\quad (b)\ \frac{1}{\binom{22}{5}}$

8.21 Sonsuz bir anakütkleden çekilen örneklemlerde, örneklem büyüklüğü

(a) 30 dan 120 ye çıkarsa

(b) 80 dan 180 e çıkarsa

(c) 450 dan 50 ye düşerse

(d) 250 dan 40 a düşerse ortalamanın standart sapması ne olur?

ÇÖZÜM $\sigma_{\bar{x}}$: örneklem ▯rtalamasının standart sapması

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Burada σ anakütle standart sapmasıdır.

(a) $\sigma_{\bar{x}}$ değeri yarı yarıya azalır.

(b) $\sigma_{\bar{x}}$ değeri $\frac{2}{3}$ oranında azalır.

(c) $\sigma_{\bar{x}}$ değeri 3 kat artar.

(d) $\sigma_{\bar{x}}$ değeri 2,5 kat artar.

8.27 α=24 β=48 ▯lan tekdüze dağılımdan n=200 ▯lan rassal bir örneklem çekilmiştir. Merkezi limit te▯remine göre örneklem ▯rtalamasının 35'ten küçük ▯lma ▯lasılığı kaçtır?

ÇÖZÜM $X \sim tekdüze(24{,}48)$

$$\mu = \frac{24+48}{2} = 36 \qquad \sigma^2 = \frac{1}{12}(48-24)^2 = 48$$

$\overline{X} \approx N\left(36, \frac{48}{100}\right)$ Merkezi Limit Teoremine göre

$$P(\overline{X} \leq 35) = P\left(Z \leq \frac{35-36}{\sqrt{\frac{48}{200}}}\right) = P(Z \leq -2.04) = 0.5 - 0.4793 = 0.021$$

8.28 μ=51.4 σ=6.8 olan normal bir anakütleden 64 büyüklüğünde rassal bir örneklem çekilmiştir. Örneklem ortalamasının

(a) 52.9 dab büyük

(b) 50.05 ile 52.3 arasında

(c) 50.6 dan küçük çıkma olasılıkları kaçtır?

ÇÖZÜM $\overline{X} \sim N\left(51.4 \quad \frac{(6.8)^2}{64}\right)$

$$(b)\ P(50.5 < \overline{X} < 52.3) = P\left(\frac{50.5-51.4}{6.8/8} < Z < \frac{52.3-51.4}{6.8/8}\right) = P(-1.06 < Z < 1.06)$$
$$= 2\,\varphi(1.06) = 2(0{,}3554) = 0{,}7108$$

8.39 $X_1, X_2, \dots, X_n$ v=1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına uyan bağımsız rassal değişkenlerse ve $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ise

$$Z = \frac{\frac{Y_n}{n} - 1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}$$

değişkeninin n→∞ 'a giderken limitteki dağılımının standart normal dağılım olduğunu gösterin.

ÇÖZÜM $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad ve \quad \mu = E(X_i) = 1 \quad Var\,(X_i) = 2$

$\frac{Y_n}{n} = \overline{X}$ o zaman $\mathrm{E}(\overline{X}) = 1$ ve $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{2}{n}$

Teorem 8.1 den Merkezi limit teoremini kullanarak

$$Z = \frac{\overline{X}-1}{\sqrt{\frac{2}{n}}} = \frac{\frac{Y_n}{n}-1}{\sqrt{\frac{2}{n}}} \xrightarrow{n \to \infty} N(0,1)$$

8.40 Alıştırma 8.39 'un sonucuna dayanarak X, v serbestlik dereceli bir ki-kare dağılımına uyan rassal bir değişkense ve v büyükse $\frac{X-v'}{\sqrt{2v}}$ nindağılımı, standart normal dağılımla yakınsanabilir.

ÇÖZÜM v tamsayı ise

$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ $\quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ bağımsız ve her biri ki-kare 1 serbestlik derecesiyle dağılır.

$E(Y_i) = 1 \qquad Var(Y_i) = 2$

? zaman $\frac{X}{v} = \overline{Y}$ Merkezi limit Teoreminde

$$\frac{\frac{X}{v} - 1}{\sqrt{\frac{2}{v}}} = \frac{X-v}{v\sqrt{\frac{2}{v}}} = \frac{X-v}{\sqrt{2v}} \xrightarrow{n \to \infty} N(0,1)$$

8.55 T, v serbestlik dereceli t dağılımına uyuyorsa, $X = T^2$ nin de 1 ve v serbestlik dereceli bir F dağılımına uyduğunu gösterin.

ÇÖZÜM $T \sim t_v \qquad T = \frac{2}{\sqrt{Y/v}} \qquad Z \sim N(0,1) \quad Y \sim {\chi^2}_v$ Z ve Y bağımsız

$$\Rightarrow T^2 = \frac{Z^2}{Y/v} \qquad Z^2 \sim {\chi^2}_1 \quad Y^2 \sim {\chi^2}_v \qquad T^2 = \frac{Z^2/1}{Y/v} \sim F_{1,v}$$

8.56 X v_1 ve v_2 serbestlik dereceli bir F dağılımına uyuyorsa $Y = \frac{1}{X}$ in de v_2 ve v_1 serbestlik dereceli bir F dağılımına uyduğunu gösterin.

ÇÖZÜM $X \sim F_{v_1,v_2} \qquad X = \frac{W_1/v_1}{W_2/v_2} \qquad W_1 \sim {\chi^2}_{v_1} \quad W_2 \sim {\chi^2}_{v_2}$

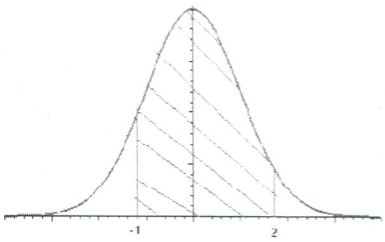
W_1 ve W_2 bağımsız

$$Y = \frac{1}{X} = \frac{W_2/v_2}{W_1/v_1} \sim F_{v_2,v_1}$$

5.) Bir fabrikada üretilen boruların çapları ortalaması μ=10 cm ve standart sapması σ=0,1 cm olan normal dağılış göstermektedir. Piyasa standartlarına göre çapların (9,9-10,2) cm arasında olması gerekmektedir. Üretimin yüzde kaçı standartlara uygundur?

ÇÖZÜM

$$
\begin{aligned}
P(9{,}9 < x < 10{,}2) &= P\left(\frac{9{,}9-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{10{,}2-\mu}{\sigma}\right)\\
&= P\left(\frac{9{,}9-10}{0{,}1} < z < \frac{10{,}2-10}{0{,}1}\right)\\
&= P(-1 < z < 2)\\
&= \Phi(2) - \Phi(-1)\\
&= 0{,}9772 - 0{,}1587\\
&= 0{,}8185
\end{aligned}
$$



6.) Bir sınıftaki öğrencilerin olasılık dersinden aldıkları vize notlarının ortalaması 63 ve standart sapması 6 olan bir normal dağılış gösterdiği biliniyor. Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin vize notunun 75 den fazla olması olasılığı nedir? Sınıf mevcudu 65 kişi ise, kaç öğrencinin vize notu 60 ile 75 arasındadır?

ÇÖZÜM

X şans değişkeni öğrencinin olasılık dersi vize notunu göstermek üzere $X \sim N(63{,}36)$ dır. Buna göre

$$P(X > 75) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{75-63}{6}\right) = P(Z > 2) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228$$

$$
\begin{aligned}
P(60 < X < 75) &= P\left(\frac{60-63}{6} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{75 -- 63}{6}\right)\\
&= P\left(-\frac{1}{2} < Z < 2\right) = 0{,}4772 + 0{,}1915 = 0{,}6687
\end{aligned}
$$

Buna göre 65 kişilik sınıf mevcudu için, 65.(0,6687)=43 kişinin vize notu 60 ile 75 aralığındadır.

7.) Bir grup erkek öğrencinin ağırlıklarının normal dağılış gösterdiği biliniyor. Bu öğrencilerin %60 ının ağırlığı 60 kg ın altında, %20 sinin ağırlığı 80 kg ın üzerindedir. Buna göre dağılışın ortalama ve varyansını bulunuz?

ÇÖZÜM

X gruptaki bir öğrencinin ağırlığını gösteren şans değişkeni olmak üzere, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Öncelikle tablodan yararlanabilmek için dağılımı standartlaştıralım.

$X_1 = 60$ için $z_1 = \dfrac{60-\mu}{\sigma}$ olmak üzere $0{,}6 = 0{,}5 + \Phi(z_1)$

$X_2 = 80$ için $z_2 = \dfrac{80-\mu}{\sigma}$ olmak üzere $0{,}2 = 0{,}5 - \Phi(z_2)$

olur. Buna göre $\Phi(z_1) = 0{,}1$ dolayısıyla tablodan $(z_1) = 0{,}253$ ve $\Phi(z_2) = 0{,}3$ dolayısıyla tablodan $z_2 = 0{,}842$ bulunur. Buradan

$60 - \mu = 0{,}253\sigma$

$80 - \mu = 0{,}842\sigma$

Şeklindeki denklem sistemi oluşur. Sistemin çözümünden μ=51,4 kg ve $\sigma \cong 34$ kg bulunur. O halde $X \sim N(34, 34^2)$ bulunur.

8.) Bir ampul fabrikasının üretiminin %0,6 sının hatalı olduğu biliniyor. Bu fabrikanın üretiminden rastgele alınan 400 adetlik bir numunede, en çok 3 tane hatalı ampul çıkması olasılığını normal dağılış yaklaşımı ile bulunuz?

ÇÖZÜM

X şans değişkeni hatalı ampul sayısını göstermek üzere; X in dağılımı Poisson dağılışına da uymaktadır. Fakat biz bu soruyu normal dağılıma yaklaşımla çözeceğiz.

$\mu = n.\theta$ eşitliğinde n=400 ve $\theta = 0{,}006$ olduğundan $\mu = 2{,}4$ olur. $\sigma = 1{,}54$ olur.

$$P(X \leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3 + 0{,}5 - 2{,}4}{1{,}54}\right) = P(Z \leq 0{,}174) = 0{,}5 + \Phi(0{,}714) = 0{,}7624$$

bulunur. Yaklaşımın çok iyi olması için n yeterince büyük olmalıdır.

MAT 208 ALIŞTIRMALAR 2

8. 1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sonsuz bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem oluşturuyorsa, Teorem 4.15'in sonucunu kullanarak r=1,2,...,n için, $Cov(X_r - \overline{X}, \overline{X}) = 0$ olduğunu gösterin.,

ÇÖZÜM
$$\begin{aligned} Cov(X_r - \overline{X}, \overline{X}) &= Cov(X_r, \overline{X}) - Cov(\overline{X}, \overline{X}) \\ &= Cov\left(X_r, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - Var(\overline{X}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Cov(X_r, X_k) - \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = 0 \end{aligned}$$

Çünkü $Cov(X_r, X_k) = \begin{cases} 0, & eğer\ r \neq k \\ \sigma^2, & eğer\ r = k \end{cases}$

8. 2. $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ ile $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{1n_2}$ bağımsız rassal değişkenlerse ve bunlardan ilk n_1'i ortalaması μ_1 ve varyansı $\sigma_1{}^2$ olan sonsuz bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem, öteki n_2'si de ortalaması μ_2 ve varyansı $\sigma_2{}^2$ olan sonsuz bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem oluşturuyorsa, Teorem 4.14 ile sonucunu kullanarak

$(a) E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$

$(b) Var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}$

olduğunu gösterin.

ÇÖZÜM $\overline{X}_1 \sim \left(\mu_1, \frac{\sigma_1{}^2}{n_1}\right)$ ve $\overline{X}_2 \sim \left(\mu_2, \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}\right)$ Teorem 8.1 den

$(a)\ E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$

$(b)\ Var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = Var(\overline{X}_1) + Var(\overline{X}_1) - 2\underbrace{Cov(\overline{X}_1, \overline{X}_2)}_{0}$

$$= \frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}$$

8. 4. $X_1, X_2, \dots, X_n$, θ anakütle katsayısı ile aynı Bernoulli dağılımına uyan rassal değişkenlerse $\overline{X}$, n denemedeki $\hat{\theta}$ ile simgelenen başarı sayısıdır.

(a) $E(\hat{\theta}) = \theta$

(b) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

olduğunu gösterin.