

MAT 209 OLASILIK ALIŖTIRMALAR I ve ÇÖZÜMLERİ

1) $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin 3 permütasyonlarında kaç tanesinde

a) a harfi bulunur?

b) d bulunmaz fakat b bulunur?

c) a veya c bulunur?

ÇÖZÜM

$$a) {}_5P_3 - {}_4P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-3)!} = 36$$

Burada ${}_4P_3$ a'nın bulunmadığı 3'lü permütasyonların sayısıdır.

b) ${}_4P_3$: d'nin bulunmadığı 3'lü permütasyonların sayısı

${}_3P_3$: d ve b'nin bulunmadığı 3'lü permütasyonların sayısı

Cevap: ${}_4P_3 - {}_3P_3 = 16$

c) ${}_5P_3 - {}_3P_3 = 54$

2) Ali ve Ayşe'nin içinde bulunduğu 8 öğrenci yan yana sıralanacaktır. Ali ve Ayşe yan yana gelmemek şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

ÇÖZÜM

$$8! - 2 \cdot 7! = 7!(8 - 2) = 7! \cdot 6$$

3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesindeki rakamlarını kullanarak

a) Rakamları farklı dokuz basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

b) Rakamları farklı dokuz basamaklı sayıların kaç tanesi 3 ile başlar 7 ile biter?

c) Rakamları farklı dokuz basamaklı sayıların kaç tanesinde 1 tam ortadaki rakamdır

d) Rakamları farklı dokuz basamaklı sayıların kaç tanesi 5 ile tam bölünür.

ÇÖZÜM

a) ${}_9P_9 = 9!$ b) ${}_7P_7 = 7!$ c) ${}_8P_8 = 8!$

d) Son basamak 5 olmalıdır. O zaman cevap ${}_8P_8 = 8!$

4) 33344556 yazılabilen 8 basamaklı sayıların kaç tanesi tekdir?

ÇÖZÜM

Birler basamağı 3 veya 5 olmalıdır.

Birler basamağı 3 ise $\frac{7!}{2! 2! 2! 1!} = 630$

Birler basamağı 5 ise $\frac{7!}{3! 2! 1! 1! 1!} = 420$

Cevap $630+420=1050$

5) 4 çocuklu bir ailede erkek ve kız çocukların doğumları kaç farklı şekilde sıralanabilir?

ÇÖZÜM

E: Erkek K:Kız

4 E 0 K hali $\frac{4!}{4! 0!} = 1$ 3 E 1 K hali $\frac{4!}{3! 1!} = 4$ 2 E 2 K hali $\frac{4!}{2! 2!} = 6$

1 E 3 K hali $\frac{4!}{1! 3!} = 4$ 0 E 4 K hali $\frac{4!}{0! 4!} = 1$

$1+4+6+4+1=16$ farklı sıra mümkündür.

6) Bir kimse bankamatik kartına ait 4 basamaklı ve iki rakamının 3, 5 veya 7 olduğunu bildiği şifresinin iki rakamını unutmuştur. Bu kimse denemeler yaparak hesaplarına girmeyi düşünmektedir. Banka günde en çok üç kez denemeye izin vermektedir. Bu şahıs en geç kaç gün sonra hesaplarına girebilir?

ÇÖZÜM

Şayet 3 rakamı şifre numarasında iki defa yer alıyorsa $\frac{4!}{2! 1! 1!} = 12$ deneme yapılmalıdır

Aynı durum 5 ve 7 rakamlarının ikişer defa tekrarlanması için düşünülürse $3 \cdot 12=36$ deneme gerekir. Cevap: 12 gün

7) 4 bay ve 5 bayan arasından 3 kişilik bir grup seçilecektir. Bu grup

a) Kaç farklı şekilde seçilebilir?

b) İçinde hiç bayan bulunmamak şartıyla kaç farklı şekilde seçilebilir?

c) Bir tane bayan bulunmak şartıyla kaç farklı şekilde seçilebilir?

ÇÖZÜM

a) $\binom{9}{3}$ b) $\binom{4}{3}$ c) $\binom{5}{1} \binom{4}{2}$

8) $(x^3 + y^2)^7$ açılımında içinde x^{15} bulunan terim nedir ?

ÇÖZÜM

Aranan terim

$\binom{7}{5} (x^3)^5 (y^2)^2 = 21x^{15}y^4$

9) $N \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(x^2 + y^3 - 2z^4)^n$ ifadesindeki açılımındaki bir terimi $x^6 y^{12} z^{20}$ olduğuna göre N kaçtır?

ÇÖZÜM

$$x^6 y^{12} z^{20} = (x^2)^3 (y^3)^4 (z^4)^5 \quad \text{o zaman } N = 3 + 4 + 5 = 12$$

10) 6 farklı renkte bilye, aynı özellikteki kutulara dağıtılacaktır

- a) İki kutuya 2 pay ve 4 pay şeklinde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?
b) İki kutuya üçer üçer kaç farklı şekilde dağıtılabilir?
c) Üç kutuya 1pay, 2 pay ve 3 pay şeklinde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?
d) Üç kutuya ikişer ikişer kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

ÇÖZÜM

$$a) \frac{6!}{2!4!} \quad b) \frac{6!}{3!3!} \quad c) \frac{6!}{1!2!3!} \quad d) \frac{6!}{2!2!2!}$$

11) Bir kutuda 4 tanesi bozuk 16 tanesi sağlam 20 tane vida vardır. Rasgele alınacak 5 vidadan 2 tanesinin bozuk çıkma olasılığı

- a) İadeli örnekleme koşullarına göre hesaplayınız
b) İadesiz örnekleme koşullarına göre hesaplayınız

ÇÖZÜM

a) iadeli örnekleme $E = \{2 \text{ vida bozuk}\}$

$$n(S) = 20^5 \quad n(E) = \binom{5}{2} 4^2 16^3$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2} 4^2 16^3}{20^5}$$

b) iadeli örnekleme $E = \{2 \text{ vida bozuk} + 3 \text{ vida sağlam}\}$

$$n(S) = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = {}_{20}P_5$$

$$n(E) = \binom{5}{2} 3 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 = \binom{5}{2} \cdot 4 \cdot P_{2 \cdot 16} P_3$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2} 3 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{{}_{20}P_5} = \frac{70}{323}$$

İade olmadığı için aynı soru kombinasyonla da yapılır:

$$P(E) = \frac{\binom{4}{2} \binom{16}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{70}{323}$$

15) 2 zar atılıyor. Üst yüzey gelen sayılarının toplamının 9' dan büyük olduğu bilindiğine göre, bu sayıların toplamının 10 olması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

$$A = \{\text{Toplamın 10 olması}\} = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$$

$$B = \{\text{Üst Yüzey Toplamı} > 9\} = \{(4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$$A \cap B = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{3}{6} = 1/2$$

16) Bir meyve bahçesinden toplanan meyvelerin %60 ı kiraz, %30 u erik ve %10 u vişneden oluşmaktadır. Bu meyvelerin çürük çıkma olasılıkları sırasıyla %2, %3 ve %4 dür. Rasgele seçilen bir meyvenin çürük olduğu bilindiğine göre bunun vişne olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

K: Kiraz E:Erik V:Vişne Ç:Çürük Meyve olması

$$P(K) = 0,6 \quad P(E) = 0,3 \quad P(V) = 0,1 \quad P(\text{Ç}|K) = 0,02 \quad P(\text{Ç}|E) = 0,03 \quad P(\text{Ç}|V) = 0,04$$

$$P(V|\text{Ç}) = \frac{P(V \cap \text{Ç})}{P(\text{Ç})} = \frac{P(V)P(\text{Ç}|V)}{P(E)P(\text{Ç}|E) + P(K)P(\text{Ç}|K) + P(V)P(\text{Ç}|V)}$$
$$= \frac{(0,1)(0,04)}{(0,3)(0,03) + (0,6)(0,02) + (0,1)(0,04)} = \frac{4}{25}$$

17) Bir zar atıldığında üst yüze asal sayı geldiği bilindiğinde bu sayının tek sayı olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

$$A = \{\text{asal sayı}\} = \{2,3,5\} \quad T = \{\text{tek sayı}\} \quad A \cap T = \{3,5\}$$

$$P(T|A) = \frac{P(A \cap T)}{P(A)} = \frac{n(A \cap T)}{n(A)} = \frac{2}{3}$$

18) Bir çift zar atıldığında üst yüze aynı sayıların geldiği bilindiğine göre bu sayıların 6 dan küçük olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

$$A \cap B = \{(1,1), (2,2)\}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{1}{3}$$

12) Bir basketbol takımında 6 siyah, 6 beyaz oyuncu vardır. Sporcuların oda arkadaşlarını belirlemek için ikili gruplar oluşturuluyor. Tesadüfi olarak yapılan grupta hiçbir siyah oyuncunun arkadaşının beyaz olmaması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

Her grubu 1,2,3,4,5,6 diye sıralayalım. İlk grup için $\binom{12}{2}$, 2. grup için $\binom{10}{2}$, 3. grup için $\binom{8}{2}$, 4. grup için $\binom{6}{2}$, 5. grup için $\binom{4}{2}$, 6. grup için $\binom{2}{2}$ farklı durum vardır.

$$n(S) = \binom{12}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{12!}{(2!)^6}$$

Benzer şekilde beyazların kendi aralarında seçimi

$$\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{6!}{(2!)^3}$$

Siyahların kendi aralarında seçimi

$$\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{6!}{(2!)^3}$$

$E = \{\text{Siyah ve beyazların oda arkadaşı olmaları}\}$

$$n(E) = \frac{6!}{(2!)^3} \frac{6!}{(2!)^3} \quad P(E) = \frac{\frac{6!}{(2!)^3} \frac{6!}{(2!)^3}}{\frac{12!}{(2!)^6}} = \frac{5}{231}$$

13) Bir torbada 5 mavi, 3 kırmızı bilye vardır. Bu torbadan bir defada alınan iki bilyenin

a) İkisinin de mavi gelme olasılığı nedir?

b) İkisinin de farklı renkte olması olasılığı nedir?

c) İkisinin de aynı renkte olması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

$$a) \frac{\binom{5}{2} \binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} \quad b) \frac{\binom{5}{1} \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} \quad c) \frac{\binom{5}{2} \binom{3}{0} + \binom{5}{0} \binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}$$

14) 5 pozitif, 8 negatif sayıdan rasgele 3 tanesi seçiliyor. Bu sayıların çarpımının negatif olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

$E = \{\text{çarpım negatif}\} = \{2 \text{ pozitif } 1 \text{ negatif sayı veya } 3 \text{ negatif sayı}\}$

$$n(E) = \binom{5}{2} \binom{8}{1} + \binom{8}{3} \quad n(S) = \binom{13}{3}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

19) Üzerinde 1 den 5 e kadar numaralar yazılı 5 kutu vardır. i. ninci kutuda i tane siyah 10-i tane beyaz bilye bulunmaktadır. Bir kutu rasgele seçilerek içinde bir bilye alınıyor. Bilyenin siyah olma olasılığı nedir? Bilye siyah olduğu biliniyorsa bunun 5. kutudan seçilme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

S: Bilyenin siyah olması K_i : i - ninci kutu $i = 1,2,3,4,5$

1. Kutu: 1S-9B 2. Kutu: 2S-8B 3. Kutu: 3S-7B 4. Kutu: 4S-6B 5. Kutu: 5S-5B

$$P(S) = P(K_1)P(S|K_1) + P(K_2)P(S|K_2) + P(K_3)P(S|K_3) + P(K_4)P(S|K_4) + P(K_5)P(S|K_5)$$

$$= \frac{1}{5} \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \frac{2}{10} + \frac{1}{5} \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \frac{4}{10} + \frac{1}{5} \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(K_5|S) = \frac{P(K_5)P(S|K_5)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$$

20) $P(B|A) = P(B|A')$ ise A ve B olaylarının bağımsız olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$P(B|A') = P(B|A) \Rightarrow \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A)P(B \cap A') = P(A')P(B \cap A)$$

$$\Rightarrow P(A)P(B \cap A') = (1 - P(A))P(B \cap A)$$

$$\Rightarrow P(A)(P(B \cap A') + P(B \cap A)) = P(B \cap A)$$

$$\Rightarrow P(A)P(B) = P(A \cap B)$$