

VARYANS ANALİZİ

İki örnek ortalaması arasındaki farkın önem kontrolü, örnek büyüklüğüne göre z veya T testlerinden biriyle yapılır. **Bu testlerle, ikiden fazla örnek ortalamasını birlikte test etmek ve aralarındaki farkın önem kontrolünü yapmak mümkün değildir. İki veya daha fazla örnek ortalaması arasındaki farkın önemli olup olmadığını test ederken varyans analizine başvurulur.**

Tek Yönlü Varyans Analizi (ANOVA)

Tek yönlü varyans analizi, iki ya da daha fazla ortalamanın eşitliğini, varyansları kullanarak test etmeye yarayan bir yöntemdir. Tamamen rassal deney tasarımı modellerini analiz etmekte kullanılır.

Varsayımları:

- Örneklerin elde edildiği populasyonlar normal ya da yaklaşık olarak normal dağılış gösterir.
- Örnekler bağımsızdır.
- Populasyon varyansları eşittir.

TEK YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ

k adet uygulamadan n tekrarlı bağımsız tesadüfi örnekler seçildiğinde, bu örneklerin ortalamalarından hareketle uygulama ortalamalarının birbirinden farklı olup olmadığı test edilebilir. Öncelikle **k adet uygulamayı belirli kriterlere göre farklı işlem gruplarına ayırmak gerekir**. Bu sınıflama şeklinde, veriler farklı işlem gruplarına ayrılırken işlem grubu içerisindeki veriler birbirinden bağımsız olur. Tek yönlü sınıflama durumunda veriler şu şekilde gösterilir.

	İşlemler					
	1	2	...	i	...	k
	X_{11}	X_{21}	...	X_{i1}	...	X_{k1}
	X_{12}	X_{22}	...	X_{i2}	...	X_{k2}
	.					
	.					
	X_{1n}	X_{2n}	...	X_{in}	...	X_{kn}
Toplam	T_1	T_2		T_i		T_k
Ortalama	\bar{X}_1	\bar{X}_2		\bar{X}_i		\bar{X}_k
						\bar{X}

Test Hipotezleri

Kurulabilecek sıfır hipotezi ve alternatif hipotez aşağıdaki gibi olur.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

H_1 : *En az iki uygulama ortalaması birbirine eşit değildir*

Hipotezler

• $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_c$

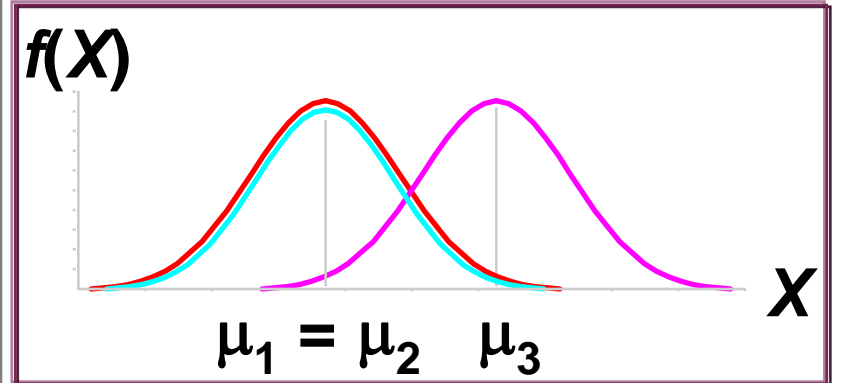
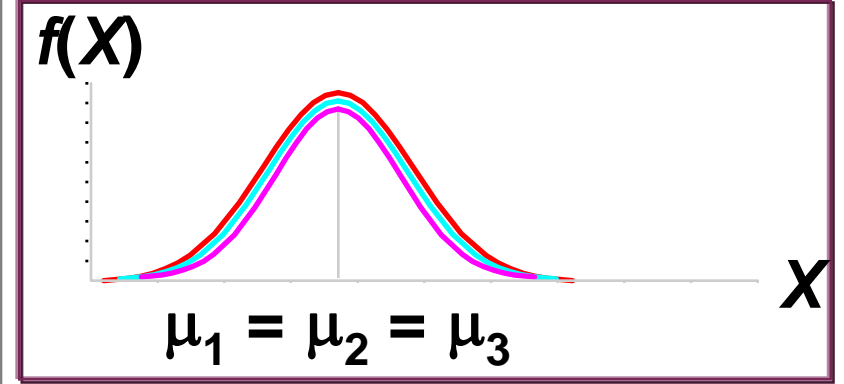
– Tüm populasyon ortalamaları eşittir.

(Uygulamanın etkisi yoktur.)

• $H_1: \text{Tüm } \mu_j \text{ ler eşit değildir.}$

– Populasyonlardan en az birinin ortalaması diğerlerinininkinden farklıdır.

(Uygulamanın etkisi vardır.)



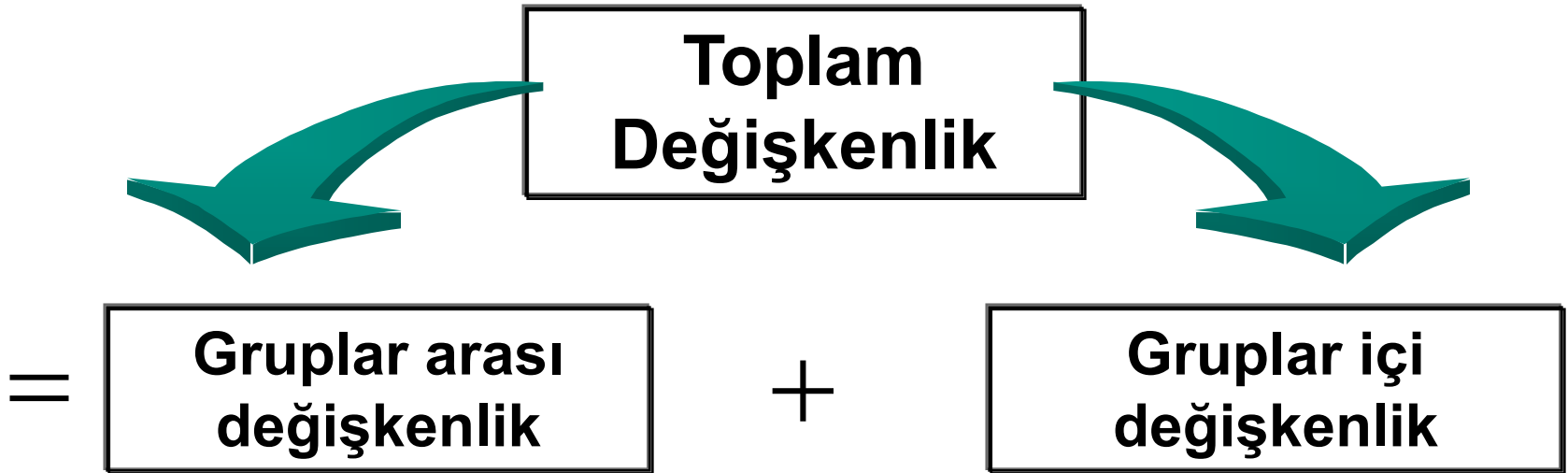
Test İstatistiği:

Varyans analizinde temel amaç, ikiden fazla örnek için ortalamalarının (\bar{X}_i 'lerin) genel ortalama (\bar{X} 'dan) sapmalarının kareler toplamını (GKT), bu sapmalara sebep olan unsurlar itibariyle kısımlara ayırmak (HKT) ve analiz etmektir. **Bu analiz sonunda**, örnekler arasında uygunluk olup olmadığı yani söz konusu örneklerin aynı uygulamaya ait birer şans örneği olup olmadıkları da ortaya konulmuş olur.

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2$$

değerinin, yani örneklerdeki **bütün** X_{ij} değerlerinin genel ortalamadan gösterdikleri sapmaların kareler toplamının iki kaynağı vardır:

Toplam Değişkenliğin Sebepleri



$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2 = n \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

GKT
GAKT
GİKT

Eşitliğin sol tarafındaki ifadeye GENEL KARELER TOPLAMI (GKT) denir. Eşitliğin sağ kısmındaki ifadelerin **birincisi örnek ortalamalarının genel ortalamadan gösterdiği sapmalar**, **diğeri ise her bir örnekteki değerlerin kendi örnek ortalamalarından gösterdiği sapmalardır.**

Birincisine, **gruplar arası kareler toplamı (GAKT)**, ikincisine **grup içi kareler toplamı (GİKT)** denir.

Eşit örnekler durumunda

$$GKT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 - \frac{T^2}{n(k)}$$

$$GAKT = \frac{\sum_{i=1}^k T_i^2}{n} - \frac{T^2}{n(k)}$$

$$GİKT = GKT - GAKT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^k T_i^2}{n}$$

Gruplar arası kareler ortalaması s_1^2 , gruplar içi kareler ortalaması s_2^2 bölünerek varyans analizinin test istatistiği olan **F** değeri elde edilir.

Eşit örnek hacimleri durumunda varyans analizi tablosu;

Değişim Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	Test İstatistiği
İşlem	GAKT	$v_1=k-1$	$s_1^2 = \frac{GAKT}{k-1}$	
Hata	GİKT	$v_2= k(n-1)$	$s_2^2 = \frac{GİKT}{k(n-1)}$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$
Toplam	GKT	$n(k)-1$		

k:örnek sayısı

N:örnek büyüklüğü

Eşit olmayan örnekler durumunda, toplam gözlem sayısı N ile gösterilirse;

$$GKT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 - \frac{T^2}{N} \qquad GAKT = \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{N}$$

$$GİKT = GKT - GAKT = \sum_{i=1}^k X_{ij}^2 - \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i}$$

Bu eşitliklerdeki üç varyasyon kaynağının her biri uygun bir serbestlik derecesi ile bölünerek birer varyans elde edilir.

Değişim Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	Test İstatistiği
işlem	GAKT	v₁=k-1	$s_1^2 = \frac{GAKT}{k-1}$	
Hata	GİKT	v₂= N-k	$s_2^2 = \frac{GİKT}{N-k}$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$
Toplam	GKT	N-1		

KRİTİK DEĞER

Çeşitli önem seviyeleri ve örnek büyüklükleri için s_1^2 / s_2^2 nin hangi noktaya kadar şansa verilebileceği, hangi noktadan sonra önemli kabul edilerek örneklerin farklı anakütlelere ait olduklarına hükmedilebileceği F cetvelleriyle tespit edilmiştir.

Hesaplanan F değeri, F tablosundan elde edilen kritik değerden küçükse örnek ortalamaları arasındaki farklılık tesadüfi; yani şanstandır ve örnekler aynı anakütleye aittir.

Hesaplanan test istatistiği , kritik değerden büyükse örnek ortalamaları arasındaki farklılığın önemli olduğuna hükmedilir ve bu örneklerin farklı anakütlelere ait olduklarına karar verilir.

F değer, iki varyansın birbirine bölümü olduğu için negatif değer almaz.

Bu yüzden F dağılımı sağa çarpıktır. H_0 hipotezinin red bölgesi eğrinin sağ ucunda yer alır.

ÖRNEK 1:

Bir seradan **$n=5$ büyüklüğündeki (tekerrür) $k = 4$ örnekten (çeşit)** aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. % 5 önem seviyesine göre örnek ortalamaları arasındaki farkın önemli olup olmadığını; bir başka deyişle, üretimin kontrol altında olup olmadığını varyans analizi ile kontrol ediniz.

	I	II	III	IV
1	10	11	16	12
2	10	10	13	10
3	11	10	15	14
4	12	9	16	13
5	12	10	15	11
T_i	55	50	75	60
T_i^2	3025	2500	5625	3600

→ $k=4$

$n=5$

$T=240$

$T^2=57600$

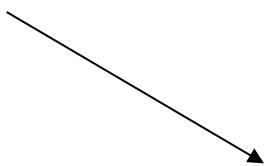
$$H_0 : \mu_I = \mu_{II} = \mu_{III} = \mu_{IV}$$

H_1 : En az iki anakütle ortalaması birbirine eşit değildir

$$\bar{X}_I = \frac{55}{5} = 11 \quad \bar{X}_{II} = \frac{50}{5} = 10 \quad \bar{X}_{III} = \frac{75}{5} = 15 \quad \bar{X}_{IV} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 = 10^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 12^2 + \dots + 14^2 + 13^2 + 11^2 = 2972$$

$$GKT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 - \frac{T^2}{n(k)} = 2972 - \frac{57600}{5(4)} = 92$$

$$GAKT = \frac{\sum_{i=1}^k T_i^2}{n} - \frac{T^2}{n(k)} = \frac{3025 + 2500 + 5625 + 3600}{5} - \frac{57600}{5(4)} = 70$$


$$\mathbf{GİKT = GKT - GAKT = 92 - 70 = 22}$$

Değişim Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	Test İstatistiği
işlem (GAKT)	70	$v_1=4-1= \underline{3}$	$s_1^2 = \frac{70}{3} = 23.333$	
Hata (GİKT)	22	$v_2= 4(5-1) = \underline{16}$	$s_2^2 = \frac{22}{16} = 1.375$	$F = \frac{23.333}{1.375} = 16.97$
Toplam (GKT)	92	$5(4)-1= \underline{19}$		

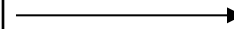
$\alpha = 0.05$ önem seviyesi , $v_1 = 3$ ve $v_2 = 16$ sd. göre $F_{tab} = 3.24$

Test istatistiği $F = 16.97$, kritik değerden ($F_{tab} = 3.24$) büyük olduğu için % 5 önem seviyesinde H_0 hipotezini reddederek **en az iki örnek ortalamasının birbirinden farklı olduğuna karar verilir.** Bu durum **üretimin kontrol altında olmadığı** kanaatini uyandırır.

ÖRNEK 2:

Üç hormon uygulamasının Sultani üzüm çeşidinin salkım ağırlığına etkisini mukayese etmek isteyen bir araştırmacı aşağıdaki verileri elde etmiştir. Bu verilere göre uygulamaların ortalama ağırlıklar arasında önemli bir farklılığa neden olup olmadığını % 5 önem seviyesinde test ediniz.

	I	II	III
	222	226	220
	224	228	221
	226	228	222
	227	227	224
	226		220
			222
T_i	1125	909	1329



k=3

N=15

T=3363

T² = 11309769

$$H_0 : \mu_I = \mu_{II} = \mu_{III}$$

H_1 : *En* az iki anakütle ortalaması birbirine eşit değildir

$$\bar{X}_I = \frac{1125}{5} = 225 \quad \bar{X}_{II} = \frac{909}{4} = 227.25 \quad \bar{X}_{III} = \frac{1329}{6} = 221.5$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 = 222^2 + 224^2 + 226^2 + \dots + 224^2 + 220^2 + 222^2 = 754099$$

$$GKT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 - \frac{T^2}{N} = 754099 - \frac{11309769}{15} = 114.4$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} = \frac{1125^2}{5} + \frac{909^2}{4} + \frac{1329^2}{6} = 754068.75$$

$$GAKT = \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{N} = 754068.75 - \frac{11309769}{15} = 84.15$$

$$GİKT = GKT - GAKT = \sum_{i=1}^k X_{ij}^2 - \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} = 754099 - 754068.75 = 30.25$$

Değişim Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	Test İstatistiği
işlem (GAKT)	84.15	$v_1=3-1$	$s_1^2 = \frac{84.15}{2} = 42.075$	
Hata	30.25	$v_2= 15-3$	$s_2^2 = \frac{30.25}{12} = 2.521$	$F = \frac{42.075}{2.521} = 16.69$
Toplam	114.40	15-1		

$\alpha = 0.01$ önem seviyesi , $v_1=2$ ve $v_2 = 12$ sd. göre $F_{tab} = 3,89$

Test istatistiği $F = 16.69$, kritik değerden ($F_{tab} = 3,89$) büyük olduğu için % 5 önem seviyesinde H_0 hipotezini red ederek **en az iki örnek ortalamasının birbirinden farklı olduğuna karar verilir. En az iki uygulamanın Sultani üzüm çeşidinde salkım ağırlığına etkileri birbirine eşit değildir.**¹⁸

AÖF Yönteminden Yararlanarak Farklı Çeşitlerin Belirlenmesi

- A, B, C, D, E gibi beş farklı zeytin çeşidinin ağaç verim ortalaması (kg/ağaç) bakımından karşılaştırmak amacıyla yürütülen bir denemeden şu gözlem değerleri elde edilmiştir.
- Buna göre bu beş zeytin çeşidinin ağaç verimlerinin aynı olduğu söylenebilir mi?

Genel Toplam=2438,2

<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>D</u>	<u>E</u>
80,1	115,6	80,8	110,1	100,6
75,4	121,2	91,1	112,4	108,4
68,3	118,4	96	118,6	111,4
73,2	98,6	77,4	126,3	
76,5		69,8	121,1	
		77,9	125,4	
		83,6		
$\Sigma A = 373,5$	$\Sigma B = 453,8$	$\Sigma C = 576,6$	$\Sigma D = 713,9$	$\Sigma E = 320,4$
$\bar{A} = 74,7$	$\bar{B} = 113,45$	$\bar{C} = 82,37$	$\bar{D} = 118,98$	$\bar{E} = 106,8$
n= 5	n= 4	n= 7	n= 6	n= 3

VK	SD	KT	KO	F
Genel	24	9385,79	~	
Gruplar Arası	4	8247,58	2061,9	36,23
Gruplar içi (Hata)	20	1138,21	56,91	
A = 74,7	B = 113,45	C = 82,37	D = 118,98	E = 106, 8

$\alpha = 0.01$ önem seviyesi , $v_1 = 4$ ve $v_2 = 20$ sd. göre $F_{tab} = 2,87$

Test istatistiği $F = 36.23$, kritik değerden ($F_{tab} = 2,87$) küçük olduğu için % 5 önem seviyesinde H_0 hipotezini red ederek **örneklerin verim değerlerinin ortalamalarının en az ikisinin birbirinden farklı olduğuna karar verilir.**

DUNCAN testinden yararlanarak farklı uygulamaların belirlenmesi:

- A, B, C, D, E gibi 5 farklı budama uygulamasının MM106 anacı üzerine aşıllı 6 yaşındaki “Granny Smith” elma çeşidinde verim ortalaması (kg/ağaç) bakımından karşılaştırmak amacıyla 5'er tekerrürlü olarak yürütülen bir denemeden şu gözlem değerleri elde edilmiştir.
- Buna göre bu beş budama uygulamasının verimi etkilediği söylenebilir mi?

<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>D</u>	<u>E</u>
30,4	41,3	34,6	24,6	40,0
27,5	38,8	35,7	22,1	41,8
36,4	36,9	34,9	19,9	42,5
22,9	37,3	36,1	20,4	39,6
33,3	40,6	35,3	21,8	36,9
$\Sigma A = 150,5$	$\Sigma B = 194,9$	$\Sigma C = 176,6$	$\Sigma D = 108,8$	$\Sigma E = 200,8$
$\bar{A} = 30,1$	$\bar{B} = 38,98$	$\bar{C} = 35,32$	$\bar{D} = 21,76$	$\bar{E} = 40,16$
n= 5	n= 5	n= 5	n= 5	n= 5

$$\Sigma = 831,6$$

Bu verilere göre varyans analiz tablosu Őu Şekilde oluŐturulur;

VK	SD	KT	KO	F
GKT	24	1291,92	~	
GAKT	4	1134,04	283,51	35,93
GİKT(HKT)	20	157,88	7,89	

Önce bu 5 grup ortalamasını küçükten büyüĒe doĒru sıralayalım.

$$\bar{D} = 21,76 \quad \bar{A} = 30,1 \quad \bar{C} = 35,32 \quad \bar{B} = 38,98 \quad \bar{E} = 40,16$$